学　　号　2014301000175

密　　级　

武汉大学本科毕业论文

Hardy-Littlewood 极大算子及其应用

院 (系) 名 称：　数学与统计学院

专 业 名 称：　数学弘毅班

学 生 姓 名：　郝子墨

指 导 教 师：　张希承　教授

二〇一八年五月

郑 重 声 明

本人郑重声明: 所呈交的学位论文, 是本人在导师指导下, 独立进行研究工作所取得的研究成果. 除文中已经标明引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的研究成果. 对本文的研究做出贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明. 本声明的法律结果由本人承担.

学位论文作者 (签名):

年 月 日

摘　　要

为了解决实分析中的问题，极大算子和奇异积分理论在上个世纪初被提出。本文主要围绕插值定理，极大函数和乘子定理这个时间顺序从上个世纪初 Calderón-Zygmund 的结果到上世纪中叶 Mikhlin 的结果来简单的介绍奇异积分理论，并穿插了我对该理论的理解，以及我对于一些简单问题证明方法的改进和从新整理. 例如极大函数对偶性的证明和极大算子 L^p 有界性的证明. 其中极大函数的有界性分别采用了 Calderón-Zygmund 分解和一个新的覆盖方法证明，乘子定理则是通过引入 Littlewood-Paley 算子的思想和算子的共轭来证明, 并利用乘子定理对 Sobolev 空间用分数阶 Laplace 算子进行了简单刻画.

关键词: 极大函数；奇异积分算子；Littlewood-Paley 算子

ABSTRACT

For solving some problem in real analysis, the theorem of maximal function and singular integral were born in the earlier of the 20 century. This paper is mainly about interpolation, maximal function and multiplier theorem, which were come up by Marcinkiewicz, Calder*ó*n-Zygmund and Mikhlin. Besides, there are some of what i think about them in it. Also some improvement of the way of proof and a new arrangement of some proof are in it, such as the proof of the duality of maximal function and the proof of the L^p bounded property of maximal function. The technology in the proof of the L^p bounded property of maximal function is Calder*ó*n-Zygmund decomposition and a cover method made by me. We will introduce the Littlewood-Paley theorem to prove Mikhlin multiplier theorem, to make a new view of Sobolev space by fractional order Laplace operator too.

Key words: maximal function; singular integral operator; Littlewood-Paley operator

目　　录

1 引言

1.1 基本记号

$\mathbb{R}^d$	d 维欧氏空间
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{Z}$	整数集
$B(x,r)$	以 x 为球心半径为 r 的球
$\chi_A(x)$	集合 A 上的示性函数
$m(A)$	勒贝格可测集 A 的勒贝格测度

1.2 研究奇异积分的意义

奇异积分理论的起源可以追溯到上个世纪初的 Hilbert-Riemann 问题，即我们下面会介绍的 Hilbert 变换 (Hilbert 变换具体的定义方式见本篇 3.2 节). 起初人们利用复分析中的方法，尤其是 C-R 方程的方法研究 Hilbert 变换，具体来说就是 $f * P_y(x)$ 和 $g * P_y(x)$ 互为 $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ 上的共轭调和函数当且仅当 $g = Hf$，其中 Hf 为 f 的 Hilbert 变换，$P_y(x)$ 为 Poisson 核，继而 $Hf + if$ 为一个解析函数的边界，利用解析函数的平方依然是解析函数，即 $(Hf)^2 - f^2 + 2ifHf$ 依然是一个解析函数的边界，所以

$$(Hf)^2 - f^2 = 2H(fHf). \tag{1.1}$$

这时若假设 $\|Hf\|_p \lesssim \|f\|_p$, 利用 (1,1) 式就可以推出 $\|Hf\|_{2p} \lesssim \|f\|_{2p}$(具体方法见本篇 3.2 节). 幸运的是利用傅立叶变换有

$$\widehat{Hf} = i\mathrm{sgn}(\cdot)\hat{f},$$

所以 $\|Hf\|_2 = \|f\|_2$ 是成立的，进而利用插值的方法就可以证明对于所有的 $p > 1$, 都有 $\|Hf\|_p \lesssim \|f\|_p$. 后来人们发现了各种各样类似的“Hilbert 变换”，比如 Riesz 变

换:

$$R_j f(x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{y_j f(x-y)}{|y|^{d+1}} dy.$$

但这个时候这个变换的作用空间不再是一维的欧式空间上的函数，而是 d 维的. 如果想继续利用复分析的方法，就要用到多复变的知识. 但那个时候多复变的结果还很匮乏，可用的结论很少，于是这项研究就引起了追求用实分析来解决问题的 Calder*ó*n 和 Zygmund 的兴趣. 随后他们得出很多关于这方面的结果，奇异积分理论随即建立了.

就像上面的 Hilbert 变换和 Riesz 变换, 奇异积分理论主要是研究这种很“奇怪”的卷积算子. 具体来说卷积核一般是不可积的，但是满足一些比如

$$\|K(x)\| \lesssim \frac{1}{|x|^d},\ \ \|\nabla K(x)\| \lesssim \frac{1}{|x|^{d-1}}$$

这样的条件，比如大部分还满足消去条件，即

$$\int_{R_1<|x|<R_2} K(x)dx = 0,$$

这时积分

$$\int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)K(y)dy = \int_{1>|y|>\varepsilon} (f(x-y)-f(x))K(y)dy + \int_{|y|\geq 1} f(x-y)K(y)dy$$

就对可积的 Lipschitz 函数有意义了，并且对于紧支集的 lipschitz 函数就可以定义 ε 趋于 0 的极限. 更一般函数奇异积分的定义和性质我们会在第三章详细展开.

当然 Calder*ó*n 和 Zygmund 的结果不是我一篇文章可以介绍清楚的，有兴趣的读者可以查阅他们的著作和相关文章. 随后奇异积分融入了新的力量——Littlewood-Paley 分解，在第二章的开始我们会证明 Calder*ó*n-Zygmund 分解，这个分解主要是对函数的定义域进行分解，而 Littlewood-Paley 分解则是另辟蹊径，对函数的傅立叶变换做分解，继而得到了很多结果. 同时可以很简单的证明 Mikhlin 乘子定理，并且得到一系列空间的刻画，例如 $Sobolev$ 空间 H_p^α:

$$\|(\sum_{k\in\mathbb{Z}} (2^{2\alpha k}+1)|P_k f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \lesssim \|f\|_{\alpha,p}.$$

接下来就让我们开始奇异积分理论的研究:

1.3 基本定义和插值定理

在数学分析中我们知道一个一维连续函数 f 的不定积分 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是处处可导并且导函数就是 f.

在实分析中我们知道一个局部可积的函数 f 的不定积分 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 是绝对连续故而几乎处处可导并且导函数就是 f，并且我们把满足

$$\lim_{h\to 0}\frac{2}{h}\int_{-h}^{h}|f(x+t)-f(x)|dt=0$$

这个条件的 x 点称为函数 f 的勒贝格点，这样的点组成集合的补集在 $\mathbb{R}^1$ 中是一个勒贝格零测集。证明见周民强 [9].

对于解决高维欧氏空间的勒贝格点问题,

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(0,r))}\int_{B(0,r)}|f(x+t)-f(x)|dt=0, \tag{1.2}$$

即不满足上面式子的点组成的集合是不是也是零测集呢？答案是肯定的.

这里我们就要引进 Hardy-Littlewood 极大函数来解决这个问题：

定义 1.3.1 对 $\mathbb{R}^d$ 上的局部可积函数 $f(x)$, 我们定义它的 Hardy-Littlewood 算子 $Mf(x)$ 为：

$$Mf(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(B(0,r))}\int_{B(0,r)}|f(x+t)|dt. \tag{1.3}$$

对于高维欧氏空间局部可积函数勒贝格点问题的证明我们放到 2.1 节. 下面我们来介绍在奇异积分理论中经常使用的插值定理.

定义 1.3.2 对于任一实的希尔伯特空间 $\mathbb{H}$, 所有从 $\mathbb{R}^d$ 映射到 $\mathbb{H}$ 的满足下面式子的算子 f 组成的空间记为 $L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\|f(x)\|^p dx<\infty, \qquad p\in[1,+\infty),$$

$$\inf\{M>0\mid m\{\|f(x)\|>M\}=0\}<\infty, \qquad p=+\infty.$$

范数记为 $\|f\|_p$

注: 和普通的 L^p 空间一样，这个空间也是 $Banach$ 空间，，特别的，简记 $L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$ 为 $L^p(\mathbb{R}^d)$.

定义 1.3.3 若做用在函数空间的线性映射 $\mathscr{T}$ 满足对于原空间任意两个元素 f,g 都有 $\|\mathscr{T}(f+g)(x)\| \le \|\mathscr{T}f(x)\| + \|\mathscr{T}g(x)\| \;\; \forall x \in \mathbb{R}^d$ 与 $\|\mathscr{T}kf\| = |k|\|\mathscr{T}f\|,\ k \in \mathbb{R}$, 就称映射 $\mathscr{T}$ 是次线性算子.

定义 1.3.4 对 $1 \le p,q \le +\infty$, 一个从 $L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$ 映射到可测函数空间的次线性算子 $\mathscr{T}$ 若满足下面两个条件之一时就称 $\mathscr{T}$ 是满足弱 (p,q) 形式的:

$q < +\infty$, 并且存在一个常数 C, 使得 $\forall f \in L^p(\mathbb{R},\mathbb{H})$ 都有

$$\sup_{\alpha>0}\left(\alpha^q m\{x \in \mathbb{R}^d |\ \ \|\mathscr{T}f\| > \alpha\}\right)^{\frac{1}{q}} \le C\|f\|_p;$$

$q = +\infty$, 并且存在一个常数 C, 使得 $\forall f \in L^p(\mathbb{R},\mathbb{H})$ 都有

$$\|\mathscr{T}f\|_\infty \le C\|f\|_p.$$

记作,

$$|\mathscr{T}f|_{q,\infty} \lesssim \|f\|_p \tag{1.4}$$

如果 $\mathscr{T}$ 满足存在一个常数 C 使得

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d),\ \ \|\mathscr{T}f\|_q \le C\|f\|_p,$$

就称 $\mathscr{T}$ 是满足强 (p,q) 形式的，特别的当 $q=\infty$ 时，强弱形式是一样的.

注: 若 $p \in [p_1,p_2]$, 则 $L^p(\mathbb{R}^d) \subset L^{p_1}(\mathbb{R}^d) + L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$. 因为如果 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, 那么对于任一正常数 a, $f\chi_{\{|f|>a\}} \in L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$, $f\chi_{\{|f|\le a\}} \in L^{p_2}(\mathbb{R}^d)$。

定理 1.3.1 (插值定理) 对于任意 $1 \le p_1 \le q_1 < +\infty, 1 \le p_2 \le q_2 \le +\infty, q_1 < q_2$, 一个从 $L^{p_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}) + L^{p_2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$ 映射到可测函数空间的次线性算子 $\mathscr{T}$ 满足弱 (p_1,q_1) 形式和弱 (p_2,q_2) 形式, 那么对于任意 $\lambda \in (0,1)$, 若 p,q 满足下面的条件，则 $\mathscr{T}$ 就是满足强 (p,q) 形式

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{p_1} + \frac{1-\lambda}{p_2} \qquad\qquad \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{q_1} + \frac{1-\lambda}{q_2} \tag{1.5}$$

证明. 情形 **1:** $p_2 > p_1$， $q_2 < +\infty$,

p,q 满足 (1.9) 时, 构造常数 c, 并由如下的等式确定:

$$c = \frac{p_2(q_2-q)}{q_2(p_2-p)} = \frac{1-\frac{q}{q_2}}{1-\frac{p}{p_2}} = \frac{1-\frac{1}{\lambda}+\frac{q(1-\lambda)}{q_1\lambda}}{1-\frac{1}{\lambda}+\frac{p(1-\lambda)}{p_1\lambda}} = \frac{p_1(q_1-q)}{q_1(p_1-p)} \tag{1.6}$$

对 $\forall f\in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$ 以及 $\forall\lambda>0$ 做分解:

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x),$$

其中

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x)\frac{\lambda}{\|f(x)\|}, & \|f(x)\|>\lambda,\\ f(x), & \|f(x)\|\le\lambda,\end{cases}\tag{1.7}$$

$$f_2(x)=\begin{cases}f(x)(1-\frac{\lambda}{\|f(x)\|}), & \|f(x)\|>\lambda,\\ 0, & \|f(x)\|\le\lambda,\end{cases}\tag{1.8}$$

由 f_1,f_2 的表达式可以得到：当 $\beta>\lambda$ 时

$$m\{\|f_1(x)\|>\beta\}=0.\tag{1.9}$$

当 $\beta\le\lambda$ 时

$$m\{\|f_1(x)\|>\beta\}=m\{\|f(x)\|>\beta\},$$

$$\begin{aligned}m\{\|f_2(x)\|>\beta\}&=m\left\{\|f(x)\|\|1-\frac{\lambda}{\|f(x)\|}\|>\beta\ \ \|f(x)\|>\lambda\right\}\\&=m\{\|f_1(x)\|>\beta\}=m\{\|f(x)\|>\beta+\lambda\}.\end{aligned}\tag{1.10}$$

由前面的注记我们易得:

$$f_1\in L^{p_2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}),\ \ f_2\in L^{p_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}).$$

由条件还知道，$\exists\, C=C(p_1,p_2,q_1,q_2)$ 使得 $\forall\alpha>0$,

$$\begin{aligned}m\{x\in\mathbb{R}^d|\ \|\mathscr{T}f_2\|>\alpha\}\le C\frac{\|f_2\|_{p_1}^{q_1}}{\alpha^{q_1}},\\ m\{x\in\mathbb{R}^d|\ \|\mathscr{T}f_1\|>\alpha\}\le C\frac{\|f_1\|_{p_2}^{q_2}}{\alpha^{q_2}}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

所以就有,

$$\begin{aligned}&\alpha^{q-1}m\{x\in\mathbb{R}^d|\ \|\mathscr{T}f\|>2\alpha\}\\ &\le\alpha^{q-1}m\{x\in\mathbb{R}^d|\ \|\mathscr{T}f_1\|>\alpha\}+\alpha^{q-1}m\{x\in\mathbb{R}^d|\ \|\mathscr{T}f_2\|>\alpha\}\\ &\le C\alpha^{q-1-q_1}\|f_2\|_{p_1}^{q_1}+C\alpha^{q-1-q_2}\|f_1\|_{p_2}^{q_2}\\ &:=C\mathbb{I}_1(\alpha)+C\mathbb{I}_2(\alpha).\end{aligned}$$

对 $\mathbb{I}_1(\alpha),\mathbb{I}_2(\alpha)$ 关于 α 积分, 利用 (1.10) 式可得:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathbb{I}_1(\alpha)d\alpha &= \int_0^{+\infty}\alpha^{q-1-q_1}\Big(p_1\int_0^{+\infty}\beta^{p_1-1}m\{\|f_2(x)\|>\beta\}d\beta\Big)^{\frac{q_1}{p_1}}d\alpha\\ &= \int_0^{+\infty}\alpha^{q-1-q_1}\Big(p_1\int_0^{+\infty}\beta^{p_1-1}m\{\|f(x)\|>\beta+\lambda\}d\beta\Big)^{\frac{q_1}{p_1}}d\alpha\\ &= \int_0^{+\infty}\alpha^{q-1-q_1}\Big(p_1\int_0^{+\infty}(\beta-\lambda)^{p_1-1}m\{\|f(x)\|>\beta\}\chi_{\{\beta>\lambda>0\}}d\beta\Big)^{\frac{q_1}{p_1}}d\alpha\\ &\le \int_0^{+\infty}\alpha^{q-1-q_1}\Big(p_1\int_0^{+\infty}\beta^{p_1-1}m\{\|f(x)\|>\beta\}\chi_{\{\beta>\lambda>0\}}d\beta\Big)^{\frac{q_1}{p_1}}d\alpha,\end{aligned}$$

这时对于任意的 α 令 $\lambda=\alpha^c$, 再利用广义闵可夫斯基不等式可得,

$$\begin{aligned}&\le \Big[\int_0^{+\infty}p_1\beta^{p_1-1}m\{\|f(x)\|>\beta\}\Big(\int_0^{\beta^{\frac{1}{c}}}\alpha^{q-1-q_1}d\alpha\Big)^{\frac{p_1}{q_1}}d\beta\Big]^{\frac{q_1}{p_1}}\\ &= \Big[\int_0^{+\infty}p_1\Big(\frac{1}{q-q_1}\Big)^{\frac{p_1}{q_1}}\beta^{\frac{q-q_1}{c}\frac{p_1}{q_1}+p_1-1}m\{\|f(x)\|>\beta\}d\beta\Big]^{\frac{q_1}{p_1}}\\ &= C_1\Big[\int_0^{+\infty}\beta^{p-1}m\{\|f(x)\|>\beta\}d\beta\Big]^{\frac{q_1}{p_1}}\\ &= C_1\|f\|_p^{\frac{pq_1}{p_1}}.\end{aligned}$$

同理

$$\int_0^{+\infty}\mathbb{I}_2(\alpha)d\alpha\le C_2\|f\|_p^{\frac{pq_2}{p_2}}.$$

最后利用分布函数与 L^p 范数的关系 $\|u\|_p=p\int_0^{+\infty}t^{p-1}m\{|u|>t\}dt$ 得到:

$$\|\mathscr{T}f\|_q=\Big(2^{-q}\int_0^{+\infty}\alpha^{q-1}m\{x\in\mathbb{R}^d|\ \|\mathscr{T}f\|>2\alpha\}d\alpha\Big)^{\frac{1}{q}} \tag{1.12}$$

$$\le 2^{-q}C\Big(C_1\|f\|_p^{\frac{pq_1}{p_1}}+C_2\|f\|_p^{\frac{pq_2}{p_2}}\Big)^{\frac{1}{q}}. \tag{1.13}$$

对于函数 $\frac{f(x)}{\|f\|_p}$, 代入 (1.12) 式得到:

$$\|\mathscr{T}\frac{1}{\|f\|_p}f\|_q\le C,$$

最后就得到 $\|\mathscr{T}f\|_q\le C\|f\|_p$.

情形 2: $p_2>p_1$,$q_2=+\infty$,$p_2=+\infty$, 利用上面的方法将 λ 取为 $\frac{\alpha}{C}$, 这时 $\|f_1(x)\|\le\alpha$ $a.e.$

情形 3: $p_2>p_1$, $q_2=+\infty$,$p_2<+\infty$, 这时同样利用上面的方法，不过将 λ 取为 $\Big(\frac{\alpha}{C(p_2\|f\|_p^p/p)^{1/p_2}}\Big)^{p_2/(p_2-p)}$, 这时 $\|f_1(x)\|\le\alpha\quad a.e.$

情形 4: $p_2<p_1$ 时

$$f_1\in L^{p_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}),\ \ f_2\in L^{p_2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}).$$

证明方法和截断参数的选取与上面一模一样.

情况 **5:** $p_2 = p_1,\ q_2 < +\infty$ 时, 与上面 $p_2 > p_1,\ q_2 < +\infty$ 一样的方法和参数选取即可.

情况 **6:** $p_2 = p_1,\ q_2 = +\infty$ 时,$f \in L^p(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}) = L^{p_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}) = L^{p_2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$

$$\alpha^{q_1} m\{\|\mathscr{T} f\| > \alpha\} \leq C^{q_1}\|f\|_p^{q_1},$$

$$\|\mathscr{T} f\|_\infty \leq C\|f\|_p,$$

$$\begin{aligned}
\|\mathscr{T} f\|_q^q &= q\int_0^{+\infty} \alpha^{q-1} m\{x \in \mathbb{R}^d |\ \|\mathscr{T} f\| > \alpha\} d\alpha \\
&= q\int_0^{C\|f\|_p} \alpha^{q-1} m\{x \in \mathbb{R}^d |\ \|\mathscr{T} f\| > \alpha\} d\alpha \\
&\leq q\int_0^{C\|f\|_p} \alpha^{q-1}\alpha^{-q_1} C^{q_1}\|f\|_p^{q_1} d\alpha \\
&= C^q\|f\|_p^{q_1}.
\end{aligned}$$

综上，插值定理得证。 □

注: 特别的，当 $p_1 = p_2 < q_1 = q_2$ 时，插值定理就变为了，若次线性算子满足弱 (p_1,p_1) 形式, 和弱 (q_1,q_1) 形式，那么对于任意的 $p \in (p_1, q_1)$, 这个算子都是 L^p 有界的. 我们在证明极大算子 L^p 有界性时将利用这个结论.

但是在真正问题中使用的差值定理都不是在全空间中而是在某个很好的稠密子空间内，即下面的插值定理。

定理 1.3.2 **(稠密子空间的插值定理)** 对于任意 $1 \leq p_1 \leq q_1 < +\infty, 1 \leq p_2 \leq q_2 \leq +\infty, q_1 < q_2$, 若一个从 $L^{p_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}) + L^{p_2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$ 的任一线性子空间 $\mathscr{A}$ 出发的的次线性算子 $\mathscr{T}$ 满足弱 (p_1, q_1) 形式和弱 (p_2, q_2) 形式, 那么对于任意 $\lambda \in (0, 1)$, 若 p, q 满足下面的条件，且 $\mathscr{A}$ 在 $L^{p_1}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$ 和 $L^{p_2}(\mathbb{R}^d;\mathbb{H})$ 中都稠密，那么 $\mathscr{T}$ 就是满足强 (p, q) 形式

$$\frac{1}{p} = \frac{\lambda}{p_1} + \frac{1-\lambda}{p_2} \qquad\qquad \frac{1}{q} = \frac{\lambda}{q_1} + \frac{1-\lambda}{q_2} \tag{1.14}$$

证明. 对于任意 $f \in L^{p_i} \setminus \mathscr{A}, \exists\{f_n\}_1^{+\infty} \in \mathscr{A}$ 在 L^{p_i} 中逼近 f，这时由弱 (p_i, q_i) 易得函数列 $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ 是依测度意义下的柯西列，由周民强 [9] 的 3.2 节的定理 3.16 可得存在一个函数 g 有

$$|g|_{q_i,+\infty} \leq C\|f\|_p$$

令 $\mathscr{T}f := g$, 易知这是一个良定义。这时补充定义的次线性算子 $\mathscr{T}$ 就再次满足了原来插值定理的条件，该定理也就得证。 $\square$

注: 特别的，对于函数空间 $L^p(\mathbb{R}^p)$，施瓦茨空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 在其中是稠密的，故而在一般的插值证明时我们只证明某个算子在施瓦茨空间时满足弱形式时就完成了证明.

2 极大函数的性质

2.1 极大函数的有界性

按照 (1.3) 式定义的极大算子 M 是一个作用在局部可积函数上的算子，只不过我们不知道它把一个局部可积函数作用成为了一个什么函数，接下来我们就将利用已经得到的插值定理和 Calderón-Zygmund 分解证明当 $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)$ 时，$Mf(x) \in L^p(\mathbb{R}^d)$，其中 $p > 1$

首先对 $p \in (1, \infty]$ 时的 L^p 函数都是局部可积的，对任意的点 x, 有

$$|Mf(x)| = \sup_{r>0} \frac{1}{m(B(0,r))} \int_{B(0,r)} |f(x+t)| dt \leq \|f\|_\infty,$$

就可以得到:

$$\|Mf\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

由插值定理知，只要证明证明极大算子满足弱 (1,1) 形式，就可以得到对任意的 $p \in (1, \infty]$, M 都是 L^p 空间到 L^p 空间有界的。这里我们先介绍可积函数的 Calderón-Zygmund 分解定理，用于解决 M 的弱 (1,1) 形式，而我们先部分的证明它，定理本身完整的证明我们将利用极大算子的有界性在后面证明。

注意，这里定理的证明并不是循环论证，在证明极大算子的有界性并不需要完整的 Calderón-Zygmund 分解。不过我们依然会介绍一种利用覆盖证明极大算子有界的方法 (见本文 3.3 节)，之所以要如此不厌其烦的论证，是为了说明极大函数与 Calderón-Zygmund 分解之间的关系。

定理 2.1.1 (Calderón-Zygmund **分解**) 对于任意的 $\mathbb{R}^d$ 上的可积函数 $f(x)$，任意的 $\alpha > 0$, 都存在一个开集 Ω, 以及其补集 F, 使得:

1）$|f(x)| \leq \alpha \quad a.e.\ x \in F$,

2）存在一族二进方体 Q_i, 使得 $\Omega = \cup_i Q_i$, 并且

$$\forall i,\ \alpha < \frac{1}{m(Q_i)} \int_{Q_i} |f(x)| dx \leq 2^d \alpha. \tag{2.1}$$

注: 二进方体是指端点的各个分量都在 $\{k2^n,\ k,n\in\mathbb{Z}\}$ 中的正方体，这里的二进方体是不包含边界的开集。且由 2）可得 $m(Q_i)<\frac{\int_{Q_i}f(x)dx}{\alpha}$ 合起来就有 $m(\Omega)=\sum_i m(Q_i)<\frac{\|f\|_1}{\alpha}$

证明. 我们这里只构造一种满足 2）的分解，在证明极大算子有界性之后再回来证明这样的分解是满足 1）的.

由于 $f\in L^1(\mathbb{R}^d)$，所以任意的 $\alpha>0$, 总存在一个很大的正整数 N 使得

$$\frac{1}{2^N}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx<\alpha,$$

所以对于所有变长为 2^N 的二进方体 B 都有 (C_d 为 $\mathbb{R}^d$ 单位球体积)

$$\frac{1}{m(B)}\int_B|f(x)|dx\le\frac{1}{C_d2^N}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx\le\alpha.$$

接下来对所有的二进方体 2^d 等分，等分后的方体进行判断是否在这个二进方体上 $f(x)$ 的积分平均是否大于等于 α, 如果是的那就把这个二进方体拿出来，如果依然小于等于 α，那么就再对这个二进方体 2^d 等分，一直这么做下去，我们会发现被拿出来的方体 Q_i 上 $f(x)$ 的积分平均是大于 α 的，而 2^d 等分出 Q_i 的原大方体 Q_i^* 上 $f(x)$ 的积分平均是小于 α 的，不然不会对它 2^d 等分. 且 $m(Q_i^*)=2^dm(Q_i)$, 这时我们就得到：

$$\alpha<\frac{1}{m(Q_i)}\int_{Q_i}|f(x)|dx,$$

$$\frac{1}{m(Q_i)}\int_{Q_i}|f(x)|dx\le\frac{2^d}{m(Q_i^*)}\int_{Q_i^*}|f(x)|dx\le2^d.\alpha$$

下面为具体的做法：对所有的边长为 2^N 的二进方体进行编号 $\{B_i\}_1^{+\infty}$

第一步：将 B_1,B_2 2^d 等分成为 $B_{1,1},B_{1,2},...,B_{1,2^d},...,B_{2,2^d}$

第二步：判断 $B_{i,j},i=1,2\ j=1,...,2^d$ 是否满足 (2.1) 的左边不等式，如果满足就令其为 $\{Q_i\}_1^{m_1}$,m_1 为第二步中符合 (2.1) 左边不等式二进方体的个数, 将其他不满足的二进方体保持第一个分量 i 不变的前提下重排为 $B_{i,j}$ $(i=1,2\ j\le2^d)$, 下面的序号都为重排后的

第三步：将 $B_{1,j},B_{2,k},B_3,B_4,\ j,k<2^d$ 等分成 $B_{1,j,l},B_{2,k,l},B_{3,l},B_{4,l},\ l=1,2,...,2^d$

第四步：判断 $B_{i,j,l},i=1,2\ j\le2^d,\ l=1,...,2^d\ or\ B_{i,l},i=3,4,\ l=1,...,2^d$ 是否满足 (2.1) 的左边不等式，如果满足就令其为 $\{Q_i\}_{m_1}^{m_2}$,m_1-m_2 为第四步中符合 (2.1) 左边不等式二进方体的个数, 将其他不满足的二进方体保持第一个分量 i 不变的前

提下重排为 $B_{i,j}$, 下面的序号都为重排后的

....

第 $2n-1$ 步：将 $B_{1,j_1}, B_{2,j_2}, .., B_{2^{n-1},j_{2^{n-1}}}, B_{2^{n-1}+1}, ..., B_{2^n}$，$j_a \le 2^{nd}$ 等分成 $B_{1,j_1,l}$, $B_{2,j_2,l}, ...,. B_{2^{n-1}+1,l}, ..., B_{2^n,l}$，$l = 1, 2, ..., 2^d$

第 $2n$ 步：判断 $B_{i,j,l}, i = 1, 2, .., 2^{n-1}$ $j \le 2^{nd}$，$l = 1, ..., 2^d$ or $B_{i,l}, i = 2^{n-1}+1, ..., 2^n$，$l = 1, ..., 2^d$ 是否满足 (2.1) 的左边不等式，如果满足就令其为 $\{Q_i\}_{m_{n-1}}^{m_{n-2}}$,$m_{n-1} - m_{n-2}$ 为第 $2n$ 步中符合 (2.1) 左边不等式二进方体的个数, 将其他不满足的二进方体保持第一个分量 i 不变的前提下重排为 $B_{i,j}$, 下面的序号都为重排后的

....

这样得到的一列二进方体 $\{Q_i\}_1^\infty$ 就满足 Calderón-Zygmund 分解的 (2.1) 式，令 $\Omega = \cup_i Q_i$. 当然也有可能每一个二进方体上 $f(x)$ 的积分平均都小于等于 α, 这时就令 $\Omega = \varnothing$

随后我们会利用极大函数的有界性证明在二进方体并集的补集 $F = \Omega^c$ 上有 $f(x)$ 几乎处处小于等于 α. □

引理 2.1.1 *存在一个只与维数 d 有关的常数 C, 使得*

$$\forall f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)\ \alpha > 0,\ \ m\Big(\{x \in \mathbb{R}^d | Mf(x) > \alpha\}\Big) \le \frac{C}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx.$$

证明. 首先令 $S(x, r)$ 为以 x 为心，$2r$ 为边长的方体，显然存在一个只与维数有关的常数 C_0, 使得 $\frac{1}{C_0} m\Big(B(x, r)\Big) \le m\Big(S(x, r)\Big) < C_0 m\Big(B(x, r)\Big)$.

不妨 f 是正函数，任意 $\alpha > 0$, $x \in \{x \in \mathbb{R}^d | Mf(x) > 3^d C_0 \alpha\}$, 存在 $r > 0$, 有

$$\frac{1}{S(x, r)} \int_{S(x,r)} f(x) dx > \frac{1}{C_0 B(x, r)} \int_{B(x,r)} f(x) dx > 3^d \alpha$$

存在一个整数 l, 使得 $l \le r < 2l$, 令 $\{S_i\}_1^n$ 为与 $S(x, r)$ 相交的边长为 2^l 的二进方体，这时 $n \le 3^d$, 且 $\forall i = 1, 2, .., n$ $S(x, r) \subseteq 5S_i$.（$5S_I$ 的意思就是以这个方体中心为中心，边长变为原来五倍的方体）且 $m(\cup_i S_i) = nm(S_1) \le 3^d m\Big(S(x, r)\Big)$

所以我们有

$$\frac{1}{n} \sum_1^n \frac{1}{m(S_i)} \int_{S_i} f(x) dx = \frac{1}{\cup_i S_i} \int_{\cup_i S_i} f(x) dx > \frac{1}{3^d} \frac{1}{m\Big(S(x, r)\Big)} \int_{S(x,r)} f(x) dx > \alpha$$

这时就得到

$$\exists\, i_0\ s.t.\ Q := S_{i_0},\ \frac{1}{m(Q)}\int_Q f(x)dx > \alpha$$

故这个 Q 属于 $f(x)$ 的 Calderón-Zygmund 分解中的一个二进方体，故而 $x \in S(x,r) \subseteq 5Q \subseteq 5\Omega$，即，

$$\{x \in \mathbb{R}^d | Mf(x) > 3^d C_0 \alpha\} \subseteq \cup 5Q_i \tag{2.2}$$

故而 $\{x \in \mathbb{R}^d | Mf(x) > 3^d C\alpha\} \subseteq 5\Omega$, 所以

$$m\Big(\{x \in \mathbb{R}^d | Mf(x) > 3^d C_0 \alpha\}\Big) \leq 5^d m(\Omega) \leq \frac{5^d}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx$$

$$m\Big(\{x \in \mathbb{R}^d | Mf(x) > \alpha\}\Big) \leq \frac{C}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|dx \quad C = 15^d C_0$$

该引理得证. □

至此，极大算子的 L^p 有界性问题已经解决，接下来我们来解决 Calderón-Zygmund 分解满足条件 1）的证明，这就需要回到我们第一章定义极大函数时谈到的勒贝格点的问题.

推论 2.1.1 *若* $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$, *则*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)\ \ a.e. \tag{2.3}$$

对局部可积函数做局部截断就可以得到：

推论 2.1.2 *若* $f(x) \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$, *则*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} f(y)dy = f(x)\ \ a.e. \tag{2.4}$$

证明. (推论??) 做从 $\mathbb{R}^d$ 到 $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ 的映射 $G_f(x)$

$$G_f(x) = \left|\limsup_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} f(y)dy - \liminf_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)} f(y)dy\right|.$$

首先对于连续函数 $g(x)$, 易知 $G_g(x) = 0$, 又知连续函数在可积函数空间中稠密，故而任意 $\varepsilon > 0$, 存在一个连续函数 $g_\varepsilon(x)$, 使得 $\int_{\mathbb{R}^d}|f(x) - g_\varepsilon(x)|dx < \varepsilon$, 故而 $G_f = G_{f-g_\varepsilon}$, 且 $G_f(x) \leq 2Mf(x)$, 有

$$\forall\alpha > 0,\ m\{G_f(x) > 2\alpha\} = m\{G_{f-g_\varepsilon}(x) > 2\alpha\} \leq m\left\{M(f-g_\varepsilon)(x) > \alpha\right\}, \tag{2.5}$$

$$\leq \frac{C}{\alpha}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)-g_\varepsilon(x)|dx<\frac{\varepsilon C}{\alpha}. \tag{2.6}$$

所以 $\forall\alpha>0,\ m\{G_f(x)>2\alpha\}=0$ 随着 ε 趋于 0. 所以 $G_f(x)=0\ \ a.e.$

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}f(y)dy$$

几乎处处存在，又因为可由富比尼和积分的一致连续性, 即

$$\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x+h)-f(x)|dx=0,\ f\in L^1(\mathbb{R}^d).$$

得到函数 $F_r(x)=\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}f(y)dy$ 依 L^1 范数收敛到 $f(x)$ 当 r 趋于 0，所以函数 $F_r(x)$ 几乎处处收敛到 $f(x)$，即

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}f(y)dy=f(x)\ \ a.e.$$

推论 2.1.3 *若* $f(x)\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$, *则*

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|dy=0\ \ a.e. \tag{2.7}$$

称满足 (2.8) *式的点为函数* $f(x)$ *的勒贝格点.*

证明. 令

$$f_q(x)=\limsup_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}|f(y)-q|dy,$$

则除开一个与 q 有关的零测集 Z_q，都有 $f_q(x)=|f(x)-q|$（由于 $f(x)-q$ 局部可积）. 现在让 q 取遍所有的有理数，因为有理数可数，所以 $Z=\cup_{q\in\mathbb{Q}}Z_q$ 为一个勒贝格零测集, 这时就有 $\forall q\in\mathbb{Q}\ \ f_q(x)=|f(x)-q|\ \ (x\in Z^C)$.

这时对任意 $x\in Z^C,\forall\varepsilon>0,\ \exists q\in\mathbb{Q}$ 有 $|f(x)-q|<\varepsilon$,

$$\begin{aligned}&\limsup_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|dy,\\ \leq&\limsup_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}|f(y)-q|dy+|f(x)-q|,\\ =&2|f(x)-q|<2\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 任意性得:

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{B(x,r)}\int_{B(x,r)}|f(y)-f(x)|dy=0.$$

故而该推论得证. □

定义 2.1.1 一个集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{I}}$ 称为一个正规族，如果存在一个常数 C, 使得任意 U_α, 都存在一个包含它的球 $B(0,r_\alpha)$, 有 $Cm(U_\alpha) > m\Big(B(0,r_\alpha)\Big)$.

对于正规族，$f(x)$ 局部可积，对 $f(x)$ 的任意的勒贝格点 x，如果存在一列集合的直径趋于 0，这时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(U_n)}\int_{U_n}|f(x+y)-f(x)|dy \le \lim_{r_n\to 0}\frac{1}{Cm\Big(B(0,r_n)\Big)}\int_{B(0,r_n)}|f(x+y)-f(x)|dy,$$

$$= 0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(U_n)}\int_{U_n}f(x+y)dy = f(x).$$

例 2.1.1 若一族方体，每一个的边界到原点的距离都小于一个上界 M，则这样的一族方体就是一个正规族

这时再看 Calderón-Zygmund 分解，对于那些 $\frac{1}{m(B_i)}\int_{B_i}f(y)dy \le \alpha$ 的二进方体族 $\mathscr{C} := \{B_i\}_{i\in\mathbb{I}}$, 我们构造一个新的方体族 $\mathscr{G} = \{B-x|B\in\mathscr{C},\ x\in B\}$, 这时 $\mathscr{G}$ 里面所有的方体边界距离原点都不超过 2^N, 因此 $\mathscr{G}$ 是一个正规族.

对于处于 $F=\Omega^C$ 内的勒贝格点 x, 由 Ω 的构造方法，我们总存在一列包含 x 的二进方体族 $\{B_n\}_1^\infty \subseteq \mathscr{C}$, 同时 $diam(B_n)$ 趋于 0, 这时 $B_n - x\in\mathscr{G}$, 我们就有

$$f(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(B_n-x)}\int_{B_n-x}f(x+y)dy = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{m(B_n)}\int_{B_n}f(y)dy \le \alpha.$$

这时我们就得到了 F 中的点几乎处处有 $f(x)\le\alpha$, Calderón-Zygmund 定理到这里被彻底证明.

定义 2.1.2 一个度量空间的测度 μ 被称为 *doubling* 测度，如果存在一个常数 C, 使得任意的球 $B(x,r)$, 都有

$$\mu\Big(B(x,2r)\Big) \le C\mu\Big(B(x,r)\Big).$$

按照上面的方法在空间 $(\mathbb{R}^d,\mathscr{B}^d,\mu)$ $\ \mu\ is\ doubling$ 上的可积函数一样有 Calderón-Zygmund 分解，极大函数

$$M_\mu f(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{\mu\Big(B(x,r)\Big)}\int_{B(x,r)}|f(y)|d\mu(y),$$

一样是 $L^p(\mathbb{R}^d, d\mu, \mathbb{R})$ 有界的次线性算子，同样局部可积函数的勒贝格点在全空间是几乎处处分布的.

同时推论 **??**以另外一种形式阐述了鞅收敛定理，令 $(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}^d, \mathbb{P})$ 为一个概率空间，$\mathbb{P}$ 是 $doubling$ 概率测度,ξ 为该概率空间上可积的随机变量，$\mathscr{F}_n$ 为边长为 2^{-n} 的所有二进方体族生成的 σ 代数，这时 $\xi_n = \mathbb{E}^{\mathscr{F}_n}\xi$ 就是一列 L^1 一致有界鞅，与上面 Calderón-Zygmund 分解后一部分的证明一样，这时 $\{B - x\,|B \in \mathscr{F}_n,\ x \in B\}$ 是一个正规族，由勒贝格点的推论就得出 ξ_n 几乎处处收敛到 ξ.

2.2 极大算子的对偶性

对于从 $L^p(\mathbb{R}^d, \mathscr{V})$($\mathscr{V}$ 是某巴拿赫空间) 到自身和从 $L^q(\mathbb{R}^d, \mathscr{V}^*)$($\mathscr{V}^*$ 是 $\mathscr{V}$ 的共轭空间,$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$) 到自身上都有界的线型算子 $\mathscr{T}$, 称它是对偶的，或者说自伴的，如果 $\langle f, \mathscr{T}g\rangle = \langle \mathscr{T}f, g\rangle$，$\langle a, b\rangle := \int_{\mathbb{R}^d} a(x)b(x)dx$ ($a \in L^p(\mathbb{R}^d, \mathscr{V}),\ b \in L^q(\mathbb{R}^d, \mathscr{V}^*)$). 那么极大算子有没有类似的自伴性呢? 答案是肯定的，由于我们只在 $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 里定理了极大算子，故而这里 $\mathscr{V}$ 就取成实数空间.

定理 2.2.1 (极大算子的对偶性) *任意 $r > 1$, 存在一个与维数 d 和 r 有关的常数 B_r, 使得对于任意的 $f\ g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} Mf(x)^r |g(x)| dx \leq B_r \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^r Mg(x) dx. \tag{2.8}$$

证明. 不妨 $f(x), g(x)$ 都为正值函数，对于任意固定的局部可积函数 g, 令 $d\mu = g(x)dx,\ d\mu^* = Mg(x)dx$，都为 σ 有限测度, 若 $f \notin L^r(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}^d, \mu^*)$, 则 (2.8) 式的右端为无穷，对偶性直接得证，故我们只考虑 $f \in L^r(\mathbb{R}^d, \mathscr{B}^d, \mu^*)$ 的情况.

我们使用插值定理，故而只需证明极大算子满足新测度下的弱 (1,1) 形式和 ∞ 形式，首先看无穷的形式，若 $\mu^*\{f(x) > N\} = \int_{\{f(x)>N\}} Mg(x)dx = 0$, 这是有两种情况，一是 $m\{f(x) > N\} = 0$, 二是 $m\{f(x) > N\} > 0,\ Mg(x) = 0\ a.e.\ x \in \{f(x) > N\}$.

情形一时由极大函数的定义知 $m\{Mf(x) > N\} = 0$ 可以推出 $\mu\{Mf(x) > N\} = 0$ 即 $\|Mf\|_{L^\infty(d\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(d\mu^*)}$.

情形二时，存在一个点 x_0, 使得 $Mg(x_0) = 0$, 这就可以说明 $g = 0\ \ a.e.\ x \in \mathbb{R}^d$, 这时显然有 $\|Mf\|_{L^\infty(d\mu)} \leq \|f\|_{L^\infty(d\mu^*)}$.

下面证明弱 (1,1) 形式，$\forall\alpha>0$, 令 $\Omega=\cup Q_i$ 为函数 $f(x)$ 的 Calderón-Zygmund 分解，由 (2.2) 式知 $\{x\in\mathbb{R}^d|\ Mf(x)>3^dC_0\alpha\}\subseteq\cup 5Q_i$, 令 $Q_i^*:=5Q_i$，任意 $x\in Q_i$ 则 $5Q_i\subseteq B(x,6\sqrt{d}\ diam(Q_i))$, 存在一个只与维数有关的常数 c_1, 使得 $c_1B(x,6\sqrt{d}\,diam(Q_i))<B(5Q_i)$, 因此

$$Mg(x)\geq\frac{1}{m(B(x,6\sqrt{d}\,diam(Q_i)))}\int_{B(x,6\sqrt{d}\ diam(Q_i))}g(x)dx\geq\frac{c_1}{m(B(Q_i^*))}\int_{Q_i^*}g(x)dx.$$

$$\begin{aligned}\int_{Q_k}f(x)Mg(x)dx&\geq\int_{Q_k}f(x)\frac{c_1}{m(Q_k^*)}g(y)dydx,\\&=\int_{Q_k^*}g(y)dy\frac{c_1}{5^dm(Q_k)}\int_{Q_k}f(x)dx,\\&\geq c_2\alpha\int_{Q_k^*}g(y)dy,\qquad c_2=\frac{c_1}{5^d}.\end{aligned}$$

两边对 k 求和:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)d\mu^*\geq\sum_{k=1}^{\infty}\int_{Q_k}f(x)Mg(x)dx\geq c_2\alpha\int_{\cup_kQ_k^*}g(y)dy,\\\geq c_2\alpha\int_{\{x\in\mathbb{R}^d|Mf(x)>3^dC_0\alpha\}}g(y)dy.\end{aligned}$$

所以我们就有

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x)d\mu^*\geq c_3\alpha\int_{\{x\in\mathbb{R}^d|Mf(x)>\alpha\}}g(y)dy\quad c_3=\frac{c_2}{3^dC_0}.$$

即

$$\int_{\mathbb{R}^d}f(x)d\mu^*\geq c_3\alpha\mu\{x\in\mathbb{R}^d\mid Mf(x)>\alpha\}.$$

到这里为止我们就完整的证明了极大算子的对偶性，特别指出的是在 $E.M.Stein$ 的论文 [7] 中，他使用的方法稍显复杂，这里的方法为我自己的一种简单的证明方法.

3 奇异积分

3.1 Calderón-Zygmund 算子

在奇异积分理论中对于 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的定义各种各样，但无非是为了保证它在某些函数空间定义的有意义和 L^p 的有界性，由于我在后面应用中的需求我这里这样定义 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 (这里我们默认 Bochner 积分的理论):

定义 3.1.1 $\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2$ 为两个 Hilbert 空间，记 $\mathbb{H}_1^2$ 为 $\mathbb{H}_1$ 到 $\mathbb{H}_2$ 的有界线性泛函空间 $B(\mathbb{H}_1, \mathbb{H}_2)$，存在一个取值在 H_1^2 的局部可积函数 $K(x)$, 且任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1), K * f(x)$ 几乎处处有意义，这时定义作用在 $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1) \cap L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1)$ 的算子

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y) f(y) dy. \tag{3.1}$$

若 T 算子满足下面的 (2.9), 并且是 $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_2)$ 的有界线性算子，就称 T 为一个 Calderón-Zygmund 奇异积分算子.

$$B := \sup_{y \neq 0} \int_{|x|>2|y|} \|K(x-y) - K(x)\| dx < +\infty. \tag{3.2}$$

定理 3.1.1 所有如定义**??**的 Calderón-Zygmund 算子都是 $L^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1) \cap L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_2)$ 的有界算子，故而可以延拓为 $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1)$ 到 $L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_2)$ 的有界线性算子.

证明. 先证明 $p \in (1,2)$ 时的有界性，由插值定理，只需要证明 T 的弱 (1,1) 形式

这里依然采取 Calderón-Zygmund 分解，$\forall \alpha > 0$, $\mathbb{R}^d = \Omega \cup F$, $\Omega = \cup_k Q_k$

$$\|f(x)\| \leq \alpha \quad a.e.\ x\ , \qquad \alpha < \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} \|f(x)\| dx \leq C\alpha.$$

这时我令

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in F, \\ \frac{1}{m(Q_k)} \int_{Q_k} f(x) dx, & x \in Q_k, \end{cases} \tag{3.3}$$

$$b(x) = f(x) - g(x).$$

易知

$$\int_{Q_k} b(x)dx = 0\,, \qquad \int_{Q_k} \|b(x)\|dx \leq C\int_{Q_k} \|f(x)\|dx. \tag{3.4}$$

我们有 $m\{\|Tf(x)\| > 2\alpha\} \leq m\{\|Tg(x)\| > \alpha\} + m\{\|Tb(x)\| > \alpha\}$, 且

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \|g(x)\|^2 dx,\\
&= \int_F \|g(x)\|^2 dx + \sum_k \int_{Q_k} \|g(x)\|^2 dx,\\
&\leq \alpha \int_F \|f(x)\|dx + \sum_k \frac{1}{m(Q_k)}(\int_{Q_k} \|f(x)\|dx)^2,\\
&\leq C\alpha(\int_F \|f(x)\|dx + \sum_k \int_{Q_k} \|f(x)\|dx) = C\alpha\|f\|_1.
\end{aligned}$$

我们就得到了第一项的估计：$m\{\|Tg(x)\| > \alpha\} \leq C\frac{\|g\|_2^2}{\alpha^2} \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1$, 接下来我们估计第二项，由于函数 $b(x)$ 的支撑集在 Ω 上，且 $m(\Omega) \leq \frac{C}{\alpha}\|f\|_1$, 我们只考虑上特定的点 x, 首先我们再次将每个 Q_k 以中心扩大 $4\sqrt{d}+1$ 倍, 记作 Q_k^*，这时 $\forall x \in {Q_k^*}^C$, $|x-y| > 2|y-y_0|$ $\forall y, y_0 \in Q_k$，令 $\Omega^* = \cup_k Q_k^*, F^* = {\Omega^*}^C$ 这时 $m(\Omega^*) \leq \frac{C_d}{\alpha}\|f\|_1$,$C_d$ 只与维数 d 有关. 利用 (2,2) 式我们可得,$\forall x \in F^*$, 固定一个 $y_k \in Q_k$:

$$Tb(x) = \sum_k \int_{Q_k} K(x-y)b(y)dy = \sum_k \int_{Q_k} (K(x-y) - K(x-y_k))b(y)dy.$$

$$\begin{aligned}
\int_{F^*} \|Tb(x)\|dx &\leq \sum_k \int_{Q_k} \|b(y)\|dy \int_{F^*} \|K(x-y) - K(x-y_k)\|dx,\\
&\leq \sum_k \int_{Q_k} \|b(y)\|dy \int_{{Q_k^*}^C} \|K(x-y) - K(x-y_k)\|dx,\\
&\leq \sum_k \int_{Q_k} \|f(y)\|dy \int_{|x-y|>2|y-y_k|} \|K(x-y) - K(x-y_k)\|dx,\\
&\leq B\sum_k \int_{Q_k} \|f(y)\|dy \leq B\|f\|_1.
\end{aligned}$$

这时我们就得到了第二项的估计

$$\begin{aligned}
m\{\|Tb(x)\| > \alpha\} &\leq m\{x \in F^*\ \|Tb(x)\| > \alpha\} + m(\Omega^*),\\
&\leq \frac{1}{\alpha}\int_{F^*} \|Tb(x)\|dx + m(\Omega^*),
\end{aligned}$$

$$\le \frac{B+C_d}{\alpha}\|f\|_1.$$

至此我们就证明了 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的 $L^p, p\in(1,2)$ 的有界性，即 $\|Tf\|_p \le C\|f\|$ $p>2$ 时我们利用 L^p 空间的对偶性，即 $\|f\|_p$ 是所有具有紧支集的 $L^q(\mathbb{R}^d;\mathbb{H}_1)$ 函数 $h(x)$, 且 $\|h\|_q=1$ 作用的上确界，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, 所以当 $p>2$ 时 $q<2$，

$$\begin{aligned}\|Tf\|_p &= \sup_h \int_{\mathbb{R}^d} Tf(x)h(x)dx = \sup_h \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)f(y)h(x)dydx,\\ &= \sup_h \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)h(x)dxf(y)dy,\\ &\le \sup_{\|Th\|_q\le C}\int_{\mathbb{R}^d} Th(y)f(y)dy \le C\|f\|_p.\end{aligned}$$

至此，我们就证明了定理 2.3. □

例 3.1.1 (Littlewood-Paley **算子**) 学过广义函数的人都应该了解施瓦茨函数空间, 这里就不定义了，记 $\mathbb{R}^d$ 上的施瓦茨空间为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$。对于 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，我们定义 Littlewood-Paley 算子 P_k:

$$\mathscr{F}(P_kf(x))(\xi) = \psi(\frac{\xi}{2^k})\mathscr{F}(f(x))(\xi).$$

其中 $\mathscr{F}$ 是傅立叶变换，以后简记 $\mathscr{F}(f(x))(\xi)$ 为 $\hat{f}(\xi)$. ψ 的定义如下，令 $\phi(x)$ 是 $\chi_{B(0,1+\varepsilon)}(\xi)$ 的磨光，即 $\phi(x)$ 满足，在 $\{|\xi|\le 1\}$ 上恒为 1，在 $\{|\xi|>2\}$ 上恒为零，且是一个光滑的函数，恒小与等于 1. 令 $\psi(\xi) := \phi(2\xi)-\phi(\xi)$, 这时显然有

$$supp\psi(\frac{\xi}{2^k}) \subseteq \{2^{k-1}<|\xi|<2^{k+1}\}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{l}\psi(\frac{\xi}{2^k}) = \phi(\frac{\xi}{2^l}),\ \ \sum_{k=l}^{+\infty}\psi(\frac{\xi}{2^k}) = 1-\phi(\frac{\xi}{2^{l-1}}),\ \ \sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(\frac{\xi}{2^k}) = 1, \tag{3.6}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widehat{P_kf}(\xi) = \hat{f}(\xi), \qquad \sum_{k\in\mathbb{Z}}P_kf(\xi) = f(\xi). \tag{3.7}$$

注意到 P_kf 依然是施瓦茨函数，有很好的光滑性，所以（3.7）式是逐点成立的. 同时 $P_kf(x) = \int_{\mathbb{R}^d}\mathscr{F}^{-1}(\psi(\frac{\xi}{2^k}))(x-y)f(y)dy$ 是一个卷积算子，然后我们构造从 $L^2(\mathbb{R}^d)$ 到 $L^2(\mathbb{R}^d,\ell^2)$ 的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子 $\mathscr{L}f(x) = K*f(x)$，其中 $K(x) = (\mathscr{F}^{-1}(\psi(\frac{\xi}{2^k}))(x))_{k\in\mathbb{Z}} = (2^{dk}\hat{\psi}(2^kx))_{k\in\mathbb{Z}}$, 下面证明 $K*f\in L^2(\mathbb{R}^d,\ell^2)$ 对于任

意的 $f \in L^2(\mathbb{R}^d) \cap \mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$, 且可延伸为对任意 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$，并且 $\mathscr{L}$ 是 2.3 定义的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子.

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^d} \|K * f(x)\|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\mathscr{F}^{-1}(\psi(\frac{\xi}{2^k})\hat{f}(\xi))(x))^2 dx, \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} (\mathscr{F}^{-1}(\psi(\frac{\xi}{2^k})\hat{f}(\xi))(x))^2 dx, \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^d} (\psi(\frac{x}{2^k})\hat{f}(x))^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (\psi(\frac{x}{2^k})\hat{f}(x))^2 dx, \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{2^k<|x|\le 2^{k+1}} (\psi(\frac{x}{2^k})^2 + \psi(\frac{x}{2^{k+1}})^2)\hat{f}(x)^2 dx \le 2\|\psi\|_\infty \|f\|_2.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

由 Bochner 函数空间的求导方法，

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \;\; \partial_i K(x) = (2^{dk+k} h_i(2^k x))_{k\in\mathbb{Z}}.$$

令

$$h_i := \partial_i \hat{\psi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^d),$$

由施瓦茨函数空间的定义，

$$\exists\, C_1, C_2,\;\; |h_i(x)| \le C_1,\;\; |x^{d+2} h_i(x)| \le C_2.$$

最后，

$$\begin{aligned}
\|\partial_i K(x)\|^2 &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} 2^{2(d+1)k} h_i(2^k x)^2 = \sum_{k\le ln\frac{1}{x}} 2^{2(d+1)k} h_i(2^k x)^2 + \sum_{k> ln\frac{1}{x}} 2^{2(d+1)k} h_i(2^k x)^2, \\
&\le C_1^2 2^{2(d+1)k ln\frac{1}{x}} + \sum_{k> ln\frac{1}{x}} 2^{2(d+1)k} \frac{C_2^2}{2^{2(d+2)k} x^{2(d+2)}} = (C_1^2 + C_2^2)\frac{1}{x^{2(d+1)}}.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

所以我们得到:

$$\|\nabla K(x)\| \lesssim \frac{1}{x^{(d+1)}}. \tag{3.10}$$

由路径微积分公式 $K(x)-K(y) = (x-y)\int_0^1 \nabla K(x-t(x-y))dt$, 易知 (2.9) 式可由 (2.17) 式简单推出，故而我们证明了从 $L^p(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ 到 $L^p(\mathbb{R}^d, \ell^2)$ 的 Littlewood-Paley 算子 $\mathscr{L}$ 的有界性.

在后面的乘子定理中，我们需要这个算子来证明.

3.2 齐型核算子的有界性

这一节我们介绍具有齐性的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子，即 $K(ax) = \frac{1}{a^d}K(x)\ \forall x \in \mathbb{R}^d, a > 0$, 这时我们记 $K(x) = \frac{\Omega(x)}{|x|^d}$, 则 $\Omega(ax) = \Omega(x)$，即 Ω 的值完全由单位球面上的值决定.

最出名的齐性算子应该就是 Hilbert 算子了，Hilbert 算子是 d 取 1，$\Omega(x) = \mathrm{sgn}(x)$, 即

$$Hf(x) = \int \frac{1}{x-y}f(y)dy.$$

但显然这个积分对于大部分 $f(x)$ 是不存在的，这个卷积核 $K(x) = \frac{1}{x}$ 甚至都不是局部可积的. 所以我们这里要引进柯西主值定义的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

定理 3.2.1 若

$$\|K(x)\| \lesssim \frac{1}{|x|^d}, \tag{3.11}$$

$$B := \sup_{y\neq 0}\int_{|x|>2|y|}\|K(x-y) - K(x)\|dx < +\infty, \tag{3.12}$$

$$\int_{R_1<|x|\leq R_2} K(x)dx = 0,\ \forall\, 0 < R_1 < R_2, \tag{3.13}$$

这时对 $f(x) \in L^p(\mathbb{R}^d; \mathbb{H}_1))$, $p > 1$ 定义

$$T_\varepsilon f(x) := \int_{|y|>\varepsilon} f(x-y)K(y)dy, \tag{3.14}$$

则

$$\sup_\varepsilon \|T_\varepsilon f\|_p \lesssim \|f\|_p.$$

且 $T_\varepsilon f(x)$ 同时几乎处处与 L^p 收敛到一个极限函数，记这个极限函数为 $Tf(x)$.

这个定理的证明见 $E.M.Stein$ 的奇异积分和函数的可微性 [1] 一书中的 35，46 页的定律 2，5 和 66 页的引理. 这里就中不做证明了.

这时我们就可以如下的定义 Hilbert 奇异积分算子了

$$Hf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|t|>\varepsilon} \frac{f(x-t)}{t}dt.$$

并且由定理 3.2.1 知它是 L^p 有界的.

在这里我还是想具体写一下引言中的用解析函数证明 Hilbert 变换的 L^p 有界性的过程，即如何利用 (1.1) 式和 $\|Hf\|_p \leq C_p\|f\|_p$(C_p 为只与 p 有关的常数) 推出 $\|Hf\|_{2p} \lesssim \|f\|_{2p}$ 的.

证明. 由 (1.1) 式和如下不等式

$$(a+b)^p \leq max\{2^{p-1},1\}(a^p+b^p) \leq 2^p(a^p+b^p) \quad a,b \geq 0,\ p>0$$

得到:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |Hf|^{2p}dm &\leq 2^p\int_{\mathbb{R}}|f|^{2p}dm + 2^p\|H(fHf)\|_p^p,\\ &\leq 2^p\int_{\mathbb{R}}|f|^{2p}dm + C_p^p2^p\|fHf\|_p^p.\end{aligned} \tag{3.15}$$

这时利用 Hölder 不等式和均值不等式 $2\sqrt{ab} \leq \lambda a + \frac{b}{\lambda} \quad a,b,\lambda > 0$ 我们得到:

$$\begin{aligned}\|fHf\|_p^p = \int_{\mathbb{R}}|fHf|^p dm &\leq \sqrt{\int_{mR}|f|^{2p}dm\int_{\mathbb{R}}|Hf|^{2p}dm},\\ &\leq \lambda\int_{mR}|f|^{2p}dm + \frac{1}{\lambda}\int_{\mathbb{R}}|Hf|^{2p}dm.\end{aligned}$$

取 $\lambda = 2^{p+1}C_p^p$, 令 $B_p = 2^pC_p^p2^{p+1}C_p^p + 2^p$ 为只与 p 有关的常数，这时带入 (3.15) 式得，

$$\int_{\mathbb{R}}|Hf|^{2p}dm \leq B_p\int_{\mathbb{R}}|f|^{2p}dm + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|Hf|^{2p}dm.$$

移项再取 $1/2p$ 次方，就得到了最后的结果

$$\|Hf\|_{2p} \lesssim \|f\|_{2p}.$$

下面我们证明一个引理

引理 3.2.1 令 y 是 $\mathbb{R}^d$ 单位球上的一个元素，定义作用在 $L^p, p>1$ 上的线性算子 H_ε^y 如下

$$H_\varepsilon^y f(x) = \int_{|t|>\varepsilon}\frac{f(x-yt)}{t}dt,$$

则

$$\sup_{f\in L^p,\varepsilon>0,y\in S^{d-1}}\frac{\|H_\varepsilon^y f\|_p}{\|f\|} < \infty. \tag{3.16}$$

即 $\|H_\varepsilon^y f\|_p \leq C\|f\|_p$ 常数 C 与 ε, y 无关.

证明. 由 $f \in L^p$ 可知几乎处处的 $(x_2, x_3, ..., x_d)$ 有 $f(x_1, x_2, .., x_d) \in L^p(\mathbb{R}_{x_1})$，故这个算子是有意义的. 当 $y_0 = (1, 0, 0..., 0)$ 时，有

$$H_\epsilon^{y_0} f(x) = \int_{|t|>\epsilon} \frac{f(x_1 - t, x_2, ..., x_d)}{t} dt.$$

由 Hilbert 算子的有界性知，存在一个与 ϵ 无关的常数 C,$\int_{\mathbb{R}} \|H_\epsilon^{y_0} f(x)\|^p dx_1 \leq C \int_{\mathbb{R}} \|f(x_1, ..., x_d)\| dx_1$, 再对剩下的 $d-1$ 维积分就有 $\|H_\varepsilon^{y_0} f\|_p \leq C\|f\|_p$

对于其他 $y \in S^{d-1}$, 存在一个正交变换 ρ 使得 $\rho y = y_0$, 这时令 $g(x) = f(\rho^{-1}x)$, 就有

$$H_\varepsilon^y f(x) = \int_{|t|>\varepsilon} \frac{g(\rho x - \rho y t)}{t} dt = \int_{|t|>\varepsilon} \frac{g(\rho x - y_0 t)}{t} dt.$$

我们就可以得到 $\|H_\varepsilon^y f(\rho^{-1}x)\|_p \leq C\|g(x)\|_p$, 做变量替换后就得到我们的结果 $\|H_\varepsilon^{y_0} f\|_p \leq C\|f\|_p$. □

引理 3.2.2 任意 $f \in L^p$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon, y \in S^{d-1}} \|H_{\varepsilon_1}^y f - H_{\varepsilon_2}^y f\|_p = 0. \tag{3.17}$$

证明. 首先对 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 令 $\rho g(x) := g(\rho x)$，$A := sup|\nabla g(x)| < +\infty$, 我们有

$$|H_{\varepsilon_1}^y(\rho g)(\rho^{-1}x) - H_{\varepsilon_2}^y(\rho g)(\rho^{-1}x)| = |\int_{\varepsilon_1 \leq |t| \leq \varepsilon_2} \frac{g(x_1 - t, x_2, ..., x_d)}{t} dt|,$$

$$=|\int_{\varepsilon_1 \leq |t| \leq \varepsilon_2} \frac{g(x_1 - t, x_2, ..., x_d) - g(x_1, x_2, ..., x_d)}{t} dt|,$$

$$\leq 2A|\varepsilon_1 - \varepsilon_2| \leq 4A\varepsilon.$$

这时就有

$$\int_{\mathbb{R}^d} |H_{\varepsilon_1}^y(\rho g)(\rho^{-1}x) - H_{\varepsilon_2}^y(\rho g)(\rho^{-1}x)| dx \leq 4Am(supp(g))\varepsilon,$$

就得到了，

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon, y \in S^{d-1}} \|H_{\varepsilon_1}^y g - H_{\varepsilon_2}^y g\|_p = 0.$$

同时对任意小的 $\delta > 0$, 总存在一个紧支集光滑函数 $g(x)$ 使得 $\|f - g\|_p \leq \delta$, 这时

$$\sup_{0<\varepsilon_i < \varepsilon, y \in S^{d-1}} \|H_{\varepsilon_i}^y f - H_{\varepsilon_i}^y g\|_p \leq C\delta,$$

继而，

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} \sup_{0<\varepsilon_1, \varepsilon_2 < \varepsilon, y \in S^{d-1}} \|H_{\varepsilon_1}^y f - H_{\varepsilon_2}^y f\|_p \leq 2C\delta,$$

最后令 δ 趋于零就得到了想要的结果. □

定理 3.2.2 对所有的奇的齐性核奇异积分算子 (即 $\Omega(-x) = -\Omega(x)$), $T_\varepsilon f(x) = \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\Omega(y)}{|y|^d} f(x-y)dy$, 如果满足 $\int_{S^{d-1}} |\Omega(x)|dS(x) < +\infty$, 则 $T := \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f$ 在 L^p 意义下存在, 且是 L^p 有界算子.

证明. 可以先在球面上积分，然后再径向积分注得到:

$$T_\varepsilon f(x) = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dt}{t^d} \int_{\partial B(0,t)} \Omega(y) f(x-y) dS_t(y),$$

其中 dS_t 是半径为 t 得单位球表面 $\partial B(0,t)$ 上的标准勒贝格测度，令 dS 为单位球面 S^{d-1} 上的标准勒贝格测度，就有 $dS_t = t^{d-1}dS$, 于是就进一步有

$$\begin{aligned} T_\varepsilon f(x) &= \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{dt}{t} \int_{S^{d-1}} \Omega(ty) f(x-ty) dS(y), \\ &= \int_{S^{d-1}} \Omega(y) \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{f(x-ty)}{t} dt dS(y), \\ &= \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} \Omega(y) H_\varepsilon^y f(x-y) dS(y). \end{aligned} \tag{3.18}$$

利用 Bochner 积分理论和（2.22）式得

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon f\|_p &\leq \frac{1}{2} \int_{S^{d-1}} |\Omega(y)| \|H_\varepsilon^y f(x-y)\|_{L^p(x)} dS(y), \\ &\lesssim \int_{S^{d-1}} |\Omega(y)| \|f\|_p dS(y) \lesssim \|f\|_p. \end{aligned} \tag{3.19}$$

再利用 (2.23) 式和 (2.24) 式最后一个等式得到

$$T := \lim_{\varepsilon\to 0} T_\varepsilon f,$$

在 L^p 意义下存在, 最后由于（2.25）式与 ε 无关，得到 $\|Tf\|_p \lesssim \|f\|_p$. □

4　应用

4.1　Littlewood-Paley 定理和乘子定理

在例子 2.2 中我们介绍了 Littlewood-Paley 算子，下面我们介绍 Littlewood-Paley 定理: 对任意 $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$,

$$\|(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \asymp \|f\|_p. \tag{4.1}$$

在之前的例子中我们已经证明了 Littlewood-Paley 算子的有界性，故而证明（4.1）式只需要证明

$$\|(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |P_k f|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p \gtrsim \|f\|_p. \tag{4.2}$$

这里我们主要利用共轭算子，Littlewood-Paley 算子 $\mathscr{L}$ 从 $L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 到 $L^p(\mathbb{R}^d,\ell^2)$ 有界，并且 $\mathscr{L}f(x) = (K_k * f(x))_{k\in\mathbb{Z}}$, $K_k(x) = 2^{dk}\hat{\psi}(2^k x)$, 对于他们两个共轭空间中稠密子集中的元素 $G \in L^2(\mathbb{R}^d,\ell^2) \cap L^q(\mathbb{R}^d,\ell^2)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \cap L^q(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ 有 $\langle \mathscr{L}^*G, f\rangle = \langle G, \mathscr{L}f\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle G_k, K_k * f\rangle = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle K_k * G_k, f\rangle = \langle \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_k * G_k, f\rangle$，这样就可以得出 Littlewood-Paley 算子的共轭算子的解析表达式 $\mathscr{L}^*G = \sum_{k\in\mathbb{Z}} K_k * G_k$. 由简单的泛函知识可得一个有界线性算子的共轭算子也是有界的即

$$\|\mathscr{L}^*G\|_p \lesssim \|G\|_p,$$

这时考虑算子 $\widetilde{\mathscr{L}}$, $\widetilde{\mathscr{L}}f(x) = ((P_{k+2} + P_{k+1} + P_k + P_{k-1} + P_{k-2})f(x))_{k\in\mathbb{Z}}$. 易得 $(P_{k+2} + P_{k+1} + P_k + P_{k-1} + P_{k-2})P_k f = P_k f$ 这时自然就令 $G_k = P_k f$, 就有 $\widetilde{\mathscr{L}}^*G = \sum_{k\in\mathbb{Z}} P_k f = f \;\; a.e.$ 这样就证明了 (4.2) 式，Littlewood-Paley 定理也就被证明，接下来我们利用这个方法证明乘子定理.

定理 4.1.1 (乘子定理) 称算子 T_m 为一个乘子算子，若它是定义在 $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}^d,\mathbb{R})$ $(p > 1)$ 上面形如 $\widehat{T_m f} := m\hat{f}$ 的算子，特别的当 $m(\xi)$ 性质很好时乘

子算子就是卷积算子. 若一个光滑的乘子算子满足下面的（3.3）

$$|\nabla^j m(\xi)| \lesssim |\xi|^{-j}, \qquad \forall d+3>j\geqslant 0, \tag{4.3}$$

则这个算子是 L^p 有界线性算子.

证明. 考虑卷积核 $K_k(x)=\mathscr{F}^{-1}(\psi(\frac{\xi}{2^k})m(\xi))(x)=2^{dk}\int_{\mathbb{R}^d}\psi(\xi)m(2^k\xi)e^{i2^kx\xi}d\xi$, 这时就有 $x^{d+2}\nabla K_k(x)\asymp 2^{-k}\int_{\mathbb{R}^d}\xi\psi(\xi)m(2^k\xi)\nabla_\xi^{d+2}(e^{i2^kx\xi})d\xi$, 利用分部积分就可以得到类似（2.35）的结果，即

$$|x|^{d+2}|\nabla K_k(x)|\lesssim 2^{-k}\int_{\mathbb{R}^d}\sum_{a=0}^{d+2}C_{d+2}^a|\nabla^{d+2}\xi\psi(\xi)|2^{ak}|\nabla^a m(2^k\xi)|d\xi,$$

结合（4.3）式就得到了 $|\nabla K_k(x)|\lesssim 2^{-k}\frac{1}{|x|^{d+2}}$，对 $K_k(x)$ 的解析式直接两边取绝对值就得到了 $|K_k(x)|\lesssim 2^{dk}$, 这样再利用（2.37）的方法就可以得到对于乘子算子 $\tilde{P}_k:=P_kT_m$ 有 $\|\sum_k\tilde{P}_kG_k\|_p\lesssim\|G\|_p$, 这时再取 $G_k=\sum_{k-2}^{k+2}P_kf$ 有 $\tilde{P}_kG_k=T_mP_kG_k=T_mP_kf=P_kT_mf$, 即 $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{P}_kG_k=T_mf$, 最后我们就利用（4.1）式得到

$$\|T_mf\|_p=\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\tilde{P}_kG_k\|_p\lesssim\|(\sum_{k\in\mathbb{Z}}|G_k|^2)^{\frac{1}{2}}\|_p\lesssim\|f\|_p,$$

乘子定理到此得证. □

注: 由 Littlewood-Paley 定理知定义在施瓦茨函数空间的算子如果满足（4.3）式，乘子定理的结论也是成立的.

在函数的运算中，相比于卷积我们往往更喜欢单纯的乘法，而且两个函数的卷积我们很难一下看出结果是什么样子的，这就凸显了乘子定理的优越性。并且乘子的计算很简单，比如说定义算子 $\Delta^{\frac{\alpha}{2}}$ 如下，$f(x)$ 为有界 Lipschitz 函数时易知该定义有意义，

$$\Delta^{\frac{\alpha}{2}}f(x):=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{f(x+y)-f(x)}{|y|^{d+\alpha}}dy,$$

这时只用把 $f(x)$ 看作 L^2 或是施瓦茨函数来直接做傅立叶变换

$$\widehat{\Delta^{\frac{\alpha}{2}}f}(\xi)=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{e^{iy\xi}-1}{|y|^{d+\alpha}}dy\hat{f}(\xi)=C|\xi|^\alpha\hat{f}(\xi),$$

当然这个时候这个算子是不满足乘子定理的，然而我再定义一个算子 $(\mathbb{I}-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}$，

$$(\mathbb{I}-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}g(x):=\mathscr{F}^{-1}(\frac{1}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}\hat{g}(\xi)),$$

这时我们都假设定义域是施瓦茨函数空间，最后再利用稠密性推广到 L^p 上面. 这时若 $\alpha>0$, 乘子 $m(\xi)=\frac{|\xi|^\alpha}{(1+|\xi|^2)^{\frac{\alpha}{2}}}$ 就符合了（4.3）式这时我们就有 $\|(\mathbb{I}-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}\Delta^{\frac{\alpha}{2}}f\|_p\leq\|f\|_p$, 如果我们定义函数空间 $H^{\alpha,p}:=(\mathbb{I}-\Delta)^{-\frac{\alpha}{2}}(L^p)=\{f\in\mathscr{S}^*\mid(\mathbb{I}-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f\in L^p\}$, 其中 $\mathscr{S}^*$ 为广义函数空间，范数定义为 $\|f\|_{\alpha,p}:=\|(\mathbb{I}-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}f\|_p$. 再利用施瓦茨函数在 $H^{\alpha,p}$ 的稠密性就可以得到

$$\|\Delta^{\frac{\alpha}{2}}f\|_p\leq\|f\|_{\alpha,p}. \tag{4.4}$$

上面的算子 $\Delta^{\frac{\alpha}{2}}$ 就是 α 稳定过程的生成子，（4.4）式可以说是 α 稳定过程与 $H^{\alpha,p}$ 空间的相互刻画，接下来再介绍一个乘子定理的应用.

推论 4.1.1 *存在一个只与维数有关的常数 C, 对于光滑的紧支集函数 $u(x)$ $\|\partial_i\partial u\|_p\leq C\|\Delta u\|_p$, 即*

$$\|\nabla^2u\|_p\lesssim\|\Delta u\|_p. \tag{4.5}$$

证明. 令 $\widehat{Tf}(\xi)=\frac{\xi_i\xi_j}{|\xi|^2}\hat{f}(\xi)$, 易知这个算子是满足乘子定理的算子，所以我们有 $\|Tf\|_p\lesssim\|f\|_p$, 再让 $f=\Delta u$ 这时 $\widehat{Tf}(\xi)=\xi_i\xi_j\hat{u}(\xi)=\mathscr{F}(\partial_i\partial_ju)(\xi)$, 所以就得到 $T\Delta u=\partial_i\partial_ju$，然后推论 4.1.1 得证. □

推论**??**有趣的地方在于一个二阶微分算子可以被对角元的元素和控制，这个结论使得在做 PDE 的先验正则估计时只对函数的 Laplace 做即可.

4.2 极大函数与局部估计

这里主要是展示一个用极大函数估计局部连续性的结果.

定理 4.2.1 *若函数 $f(x)$ 一阶可微，且 ∇f 局部可积, 则任意的 x,y 都有*

$$|f(x)-f(y)|\leqslant 2^d|x-y|(M|\nabla f|(x)+M|\nabla f|(y)). \tag{4.6}$$

证明. 首先 $f(x+z)-f(x)=z\int_0^1\nabla f(x+tz)dt$, 得

$$|f(x+z)-f(x)|\leq|z|\int_0^1|\nabla f(x+tz)|dt.$$

$\int_{\partial B(0,s)}|f(x+z)-f(x)|dS_s(z)\leq s\int_0^1\int_{\partial B(0,s)}|\nabla f(x+tz)|dS_s(z)dt=s\int_0^1\frac{1}{t^{d-1}}$ $\int_{\partial B(0,ts)}|\nabla f(x+z)|dS_{ts}(z)dt.$

这时对任意的 $r>0$,

$$\begin{aligned}
\int_{B(0,r)}|f(x+z)-f(x)|dz &= \int_0^r\int_{\partial B(0,s)}|f(x+z)-f(x)|dS_s(z)ds,\\
&\le \int_0^r s\int_0^1 t^{1-d}\int_{\partial B(0,ts)}|\nabla f(x+z)|dS_{ts}(z)dtds,\\
&= \int_0^1 t^{-1-d}dt\int_0^{tr} s\int_{\partial B(0,s)}|\nabla f(x+z)|dS_s(z)ds,\\
&\le \int_0^1 t^{-1-d}trdt\int_0^{tr}\int_{\partial B(0,s)}|\nabla f(x+z)|dS_s(z)ds,\\
&= \int_0^1 \frac{r}{t^d}\int_{B(0,t)}|\nabla f(x+z)|dzdt,\\
&= r^d\int_0^r \frac{1}{t^d}\int_{B(0,t)}|\nabla f(x+z)|dzdt.
\end{aligned}$$

随即得到

$$⨍_{B(o,r)}|f(x+z)-f(x)|dz \le \int_0^r ⨍_{B(0,t)}|\nabla f(x+z)|dzdt \le rM\nabla f(x).$$

对于 $\forall x,y\in\mathbb{R}^d$ ，取 $r=|x-y|$, 利用 $m(B(a,2r))=2^d m(B(b,r))$ 随即得到:

$$f(x)-f(y)=⨍_{B(\frac{x+y}{2},\frac{r}{2})}f(x)-f(y)dz=⨍_{B(\frac{x+y}{2},\frac{r}{2})}f(x)-f(z)dz+⨍_{B(\frac{x+y}{2},\frac{r}{2})}f(z)-f(y)dz,$$

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(y)| &\le ⨍_{B(\frac{x+y}{2},\frac{r}{2})}|f(x)-f(z)|dz+⨍_{B(\frac{x+y}{2},\frac{r}{2})}|f(z)-f(y)|dz,\\
&\le 2^d(⨍_{B(x,r)}|f(x)-f(z)|dz+⨍_{B(y,r)}|f(z)-f(y)|dz),\\
&\le 2^d r(M\nabla f(x)+M\nabla f(y)) = 2^d|x-y|(M|\nabla f|(x)+M|\nabla f|(y)).
\end{aligned}$$

到此得证，这个用极大函数估计局部的方法在证明方程唯一性时十分好用，尤其是当系数函数 $f(x)$ 不是 lipschtize，而是有一定可积性的时候.

4.3 一个小结果

在引理 (2.1) 中对极大算子弱（1，1）形式估计的常数 C 是 $15^d C_0$，一般在用维塔利覆盖的证明中也要要求 $C=5^d$，我结合 Calder$\acute{o}$n-Zygmund 分解与勒贝格测度的正则性把这个常数改为了 $C=2^d$

推论 4.3.1 当函数 $f(x)$ 可积时，对于任意的 $\alpha > 0$, 有

$$m(\{Mf > \alpha\}) \leq \frac{2^d}{\alpha}\|f\|_1. \tag{4.7}$$

证明. 同样使用覆盖定理, 令 $E_\alpha = \{Mf > \alpha\}$, $F_k = E_\alpha \cap B(0,k)$,$\forall x \in F_k$, $\exists r_x > 0$ 使得 $⨍_{B(x,r_x)} |f|dm > \alpha$ 再令 $F_k^r = \{x \in F_k \; r_x \leq r\}$, 则

$$E_\alpha = \cup_k \cup_n F_k^n, \tag{4.8}$$

取 $N_1 = \sup\{r_x \;\; x \in F_k^n\}$, 这时 $N \leq n < \infty$, 然后 $\forall 1 > \epsilon > 0 \; \exists x_1 \in F_k^n \; N_1 - \epsilon N_1 < r_1 \leq N_1$, 令 $F_{k,1}^n = \{x \in F_k^n, \; B(x, r_x) \cap B(x_1, r_1) = \varnothing\}$，其中 $r_1 := r_{x_1}$ 后面一样，这时 $\forall x \in F_k^n - F_{k,1}^n \Rightarrow x \in \frac{2N_1}{N_1 - \epsilon N_1} B(x_1, r_1)$, 再令 $N_2 = sup\{r_x, \; x \in F_{k,1}^n\}$ 同样，就 $\exists x_2 \in F_{k,1}^n$ 使得 $N_2 - \epsilon N_2 < r_2 \leq N_2$，类似的构造 $F_{k,2}^n$ 就有 $F_{k,1}^n - F_{k,2}^n \subset \frac{2N_2}{N_2 - \epsilon N_2} B(x_2, r_2)$, 然后依次找出 $x_3, x_4, ..., x_m, ...$, 因为 $m(F_k) \leq m(B(0,k)) < +\infty$, 所以就有 $r_n \to 0$ 当 n 趋于无穷的时候，即 $N_n \to 0$ 也是成立的，所以若 $\forall i = 1, 2, ... \; x \notin F_{k,i}^n$, 就有 $r_x = 0$，显然是不可能的. 所以就有 $F_k^n = \cup_i (F_{k,i}^n - F_{k,i+1}^n)$，$F_{k,0}^n = F_k^n$，注意这可数个球 $\{B(x_i, r_i)\}_i$ 是不相交的，这时就有

$$m(F_k^n) \leq \sum_{i=1}^{+\infty} (\frac{2N_i}{N_i - \epsilon N_i})^d m(B(x_i, r_i)), \tag{4.9}$$

$$= (\frac{2}{1-\epsilon})^d \sum_{i=1}^{+\infty} m(B(x_i, r_i)), \tag{4.10}$$

$$\leq (\frac{2}{1-\epsilon})^d \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{B(x_i, r_i)} |f|dm, \tag{4.11}$$

$$\leq (\frac{2}{1-\epsilon})^d \frac{1}{\alpha}\|f\|_1. \tag{4.12}$$

最后令 ϵ 趋于零，并结合（4.8）式, 我们就得到了推论 3.2 的结果. □

但是我这个小结果只能作为一个锻炼思维的思考的体现，因为关于这个常数最优估计的问题已经有人研究过，并且比我的结果要好的多，或者说是本质上的改进，我们可以看到这个常数无论是 15^d, 还是 5^d, 或是 2^d 都是与维数有关的，所以如果我们不再考虑函数 $f(x)$, 而是考虑泛函 $f(x(\cdot))$ 即定义域 $x(t)$ 是一个无穷维的函数空间，这时这个常数将变为无穷。不过目前已经有结果证实

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|,$$

这个常数 A_p 是与维数无关的，相见文献 [6]，这时我们就可以尝试把有限维的极大函数或者是奇异积分算子推广的无穷维上面去，特别的，可以推广到 Wiener 空间中去。但是这之中也有一些问题的存在，比如说无穷维空间不再存在勒贝格测度，并且布朗运动定义的 Wiener 测度也并不是 $doubling$ 的，这时再利用 Calderón-Zygmund 分解时，就必须要更小心，因为并不是所有的集合都是可以界住二倍集的，所以无限维空间的奇异积分仍是我们可以研究的一个课题.

参考文献

[1] Elias M. Stein. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. *PRINCETON UNIVERSITY PRESS PRINCETON, NEW JERSEY*,1970.

[2] C.L.Fefferman and E.M.Stein. Some maximal inequalities. *Amer.J.Math*

[3] Terence Tao. Lecture Notes 2 For 254A

[4] Xie Longjie and Zhang Xicheng. Ergodicity of stochastic differential equaltions with jumps and singular coefficients. *arXiv:1705.07402.*

[5] Zhang Xicheng and Zhao Guohuan. Heat kernel and ergodicity of SDEs with distributional drifts. *arXiv:1710.10537.*

[6] E.M. Stein and J.O.Strömberg. Behavior of maximal functions in $\mathbb{R}^n$ for large n. *Ark.Mat.*

[7] C.L.Fefferman and E.M.Stein. Some maximal inequalities. *Amer.J.Math.*

[8] Loukas Grafakos. Modern Fourier Analysis. *G.T.M.*

[9] 周民强. 实变函数论（第 2 版）. 北京大学出版社.

致　　谢

随着樱花大道的梧桐絮慢慢飘下，四年的珞珈学业即将落下帷幕。樱花开过的地方都留下了我们的汗水和笑容，狮子山上的老图，数院，老外楼与理学楼的阳光还是那么美好，在那里我收获了不只是知识，还有每一门任课老师与班导师的尊尊教诲，优秀学长学姐的不倦答疑，还有同窗的激励与情谊.

在此特别感谢指导老师张希承教授对本篇论文从选题到定稿的支持和帮助，对每一个疑惑的细致解答，认真指出论文中出现的每一个内容或文法错误. 感谢中科院的赵国焕学长对我每个简单问题的细致解答，在与他讨论的过程中我也收获颇多. 同时，还要感谢很多的学长学姐在我学习过程中的帮助和指导. 特别感谢李金宁，黄磊和赵世凡等同学在本文撰写过程中的帮助. 祝大家都有一个光明的前路和永不放弃的信念.

最后，衷心感谢这四年中所有对我有过帮助的老师，学长学姐与同学.