分类号 O211.6　　　　密　级
U D C 510　　　　编　号 10486

武漢大學

博 士 学 位 论 文

奇异动理学平均场随机微分方程

研 究 生 姓 名: 郝子墨

指导教师姓名、职称: 张希承 教授

学 科、 专 业 名 称: 数学、概率论与数理统计

研 究 方 向: 随机分析

二〇二三年五月二十日

Singular kinetic mean-field Stochastic Differential Equations

Candidate: Hao Zimo

Supervisor: Prof. Zhang Xicheng

Major: Probability Theory and Mathematical Statistics

Speciality: Stochastic Analysis

School of Mathematics and Statistics

Wuhan University

May 18th, 2023

论 文 原 创 性 声 明

本人郑重声明: 所呈交的学位论文, 是本人在导师指导下, 独立进行研究工作所取得的研究成果. 除文中已经标明引用的内容外, 本论文不包含任何其他个人或集体已发表或撰写的研究成果. 对本文的研究做出贡献的个人和集体, 均已在文中以明确方式标明. 本声明的法律结果由本人承担.

学位论文作者 (签名):

年　　月　　日

论文创新点

本学位论文的主要创新点在于:

1. 通过适当定义动理学 Hölder 空间建立动理学方程的 Schauder 估计以及各种动理学算子情形下的交换子估计，我们将拟控制计算理论推广到了退化的动理学算子情形. 其中的主要困难是动理学算子含有传输项 $v \cdot \nabla_x$，从而导致其算子半群 P_t 与 ∇_v 不可交换. 特别地，动理学算子半群不是卷积算子. 为此，我们通过引入动理学 Hölder 空间得到经典的 Schauder 估计，进一步使用 [57] 中的技巧证明交换子估计.
2. 我们计算了动理学算子影响下噪声项的重整化，并给出了刻画其奇异性指标的一般条件. 其中有趣的是零阶 Wiener 混沌项是关于速度变量 v 的函数，并不像经典热方程时的常数，并且这个零阶项函数生活在带权各向异性 Besov 空间中.
3. 本学位论文考虑了全空间上的奇异动理学方程，其中噪声生活在带权空间中，从而导致原方程存在权重损失问题. 因此，为了得到方程解的适定性，我们不能直接使用不动点定理. 为了克服该困难，Harier 和 Labbé 在 [53] 中提出了指数权的方法，继而得到了指数增长的解. 为了得到多项式增长的解，我们建立了关于拟控制解的局部化理论，并基于 [114] 中的局部化方法，直接证明了多项式增长拟控制解的存在唯一性. 需注意的是，即使在 [114] 中，作者在证明解的唯一性时也使用了指数权的方法.
4. 在考虑奇异动理学平均场方程非线性鞅问题解的适定性时，我们利用 Krylov 估计得到了逼近方程的一致矩估计，从而证明了胎紧性和解的存在性；唯一性方面，我们采用了 [94] 中 Girsanov 变换的方法.
5. 在考虑非线性动理学 Fokker-Planck 方程时，我们使用了熵方法给出了质量守恒，能量估计和熵估计. 关于这类带有奇异噪声的方程，据我们所知这是首次. 其中我们考虑了线性化方程，并得到光滑系数线性方程的一致估计，最后利用线性方程解的唯一性给出原奇异非线性方程的先验估计.

目　　录

摘　要

本学位论文主要研究带有奇异环境噪声的动理学平均场随机微分方程. 我们首先考察了带有奇异传输项的线性动理学方程，建立了动理学框架下的拟控制计算理论. 该理论最早由 Gubinelli, Imkeller 和 Perkowski 在 [46] 中提出，基于此理论，我们得到了奇异线性动理学方程的适定性. 其中，我们使用概率方法计算了有关高斯噪声在动理学算子半群作用下的重整化. 有趣的是，此处的零阶 Wiener 混沌项并不如经典情况下的常数，其为一个在 Besov 空间中良定的关于速度 v 的分布. 根据奇异线性动理学方程的结果，我们定义并得到了带有奇异环境噪声动理学平均场随机微分方程广义非线性鞅问题的唯一解. 此外，在合适的条件下，我们证明了奇异非线性动理学 Fokker-Planck 方程解的存在唯一性.

关键词: 动理学方程, 拟控制计算, 退化的平均场随机微分方程, Littlewood-Paley 分解.

ABSTRACT

In this dissertation, we study the well-posedness of kinetic Mean-field SDEs with singular environmental noise. To this end, we investigate singular kinetic equations on $\mathbb{R}^{2d}$ by the paracontrolled distribution method introduced in [46]. We develop paracontrolled calculus in the kinetic setting, and use it to establish the global well-posedness for the linear singular kinetic equations. We also demonstrate how the required products of Gaussian random field can be renormalized by probabilistic calculation. Interestingly, although the terms in the zeroth Wiener chaos of regularization approximation are not zero, they converge in suitable weighted Besov spaces and no renormalization is required. As a result we obtain the well-posedness of nonlinear martingale problem for kinetic Mean-field SDEs with singular drifts. Moreover, the global well-posedness for a nonlinear kinetic Fokker-Planck equation with singular coefficients is obtained by the entropy method.

Key words: Kinetic equations, Paracontrolled calculus, Degenerate mean-field SDEs, Littlewood-Paley's decomposition.

主要记号

为了便于阅读以及不引起混淆, 对于大多数记号, 我们会在文中使用时具体说明. 同时, 我们也约定如下常用记号, 在后面的内容中, 我们有时会不加说明地直接使用.

基本运算符号

$:=$	定义为
$\equiv$	恒等于
$a \vee b$	$\max(a,b)$，定义为 a 和 b 中较大的数
$a \wedge b$	min(a, b)，定义为 a 和 b 中较小的数
$A \lesssim B$，$A \lesssim_c B$	存在某不重要的常数 $c>0$ 使得 $A \leqslant cB$
$A \asymp B$，$A \asymp_c B$	存在某不重要的常数 $c>0$ 使得 $c^{-1}B \leqslant A \leqslant cB$

集合和空间

$\mathbb{N}$	正整数集
$\mathbb{N}_0$	非负整数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}_+$	非负实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{R}^d$	d 维欧氏空间, 当 $d=1$ 时, 简记为 $\mathbb{R}$
$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$	欧氏空间的笛卡尔乘积
$C_b(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上实值有界连续函数全体
$C^k(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上实值 k 阶连续可微函数全体
$C_b^k(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上实值有界 k 阶连续可微函数全体
$C^\infty(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上无穷次连续可微函数全体
$C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上有界无穷次连续可微函数全体
$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上紧支撑无穷次连续有界可微函数全体

$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$	$\mathbb{R}^d$ 上无穷远处趋于 0 且有界无穷次连续可微函数的全体
$\lvert\cdot\rvert_a$	各向异性指标 a 下的各向异性距离 (见正文的 (2.1))
$B_r^a := \{x\in\mathbb{R}^d \mid \lvert x\rvert_a \leqslant r\}$	以原点为心, r 为半径的各向异性闭球
$\mathscr{W}$	允许权空间 (见定义 2.1.1)
$\mathscr{P}_{\rm w}$	各向异性多项式权空间 (见正文的 (3.4))
$\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)$	带权各向异性 Besov 空间 (见定义 2.1.3)
$\mathbf{C}^s_a(\rho) := \mathbf{B}^{s,a}_{\infty,\infty}(\rho)$,	$\mathbf{B}^{s,a}_{p,q} := \mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(1)$
$\mathbb{C}^s_{T,a}(\rho) := L^\infty([0,T];\mathbf{C}^s_a(\rho))$	$\mathbf{C}^s_a := \mathbf{C}^s_a(1)$. 当 $a=(1,..,1)$ 时我们去掉上述各向异性空间记号中的小角标 a
$\mathbb{S}^\alpha_{T,a}(\rho)$, $\mathbb{S}^\alpha_{T,a} := \mathbb{S}^\alpha_{T,a}(1)$	动理学 Hölder 空间 (见定义 3.2.1)
$\mathbb{B}^\alpha_T(\rho_1,\rho_2)$, $\mathbb{B}^\alpha_T(\rho)$	可重整化对空间 (见定义 4.1.1)
$A^{b,f}_{T,q}(\rho_1,\rho_2)$, $\ell^b_T(\rho)$	可重整化对定义中的量, 分别见正文的 (4.1) 和 (5.3)
$\mathbb{B}^\alpha_T := \mathbb{B}^\alpha_T(1,1)$	$\ell^b_T = \ell^b_T(1), \quad \mathbb{A}^{b,b}_{T,q} = \sum_{i=1}^d \mathbb{A}^{b,b_i}_{T,q}(1,1)$

算子和映射

∂_i	第 i 个方向上的偏导数
$\nabla = (\partial_1,..,\partial_d)$	$\mathbb{R}^d$ 上的梯度算子
$\hat{f}$，$\check{f}$	Fourier 变换和逆 Fourier 变换算子，见第 2.1.1 小节
$\mathcal{R}^a_j$, $\tilde{\mathcal{R}}^a_j$	block 算子及其衍生算子, 见正文的 (2.9) 和 (2.10)
$f\prec g$，$f\circ g$，$f\succ g$	Bony 仿积运算，见 (2.14); 有关的估计见引理 2.2.1；$f\succcurlyeq g := f\succ g + f\circ g$
$\mathrm{com}(f,g,h) := (f\prec g)\circ h - f(g\circ h)$	交换子算子，严格定义见引理 2.2.4
$\mathscr{L}_\lambda := \partial_t - v\cdot\nabla_x - \Delta_v + \lambda$	带有耗散量 $\lambda\geqslant 0$ 的动理学算子
$\Gamma_t z := (x+tv,v)$, $\Gamma_t f(z) := f(\Gamma_t z)$	对所有的 $z=(x,v)\in\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d=\mathbb{R}^{2d}$ 和 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的可测函数 f 定义的推移算子

$P_t f := \Gamma_t p_t * \Gamma = \Gamma_t(p_t * f)$	动理学算子半群，严格定义见正文的 (3.1)
$\mathscr{I}_\lambda := \mathscr{L}_\lambda^{-1}$	动理学方程的预解算子，见正文的 (3.37)
$[\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2] f := \mathscr{A}_1(\mathscr{A}_2 f) - \mathscr{A}_2(\mathscr{A}_1 f)$	算子 $\mathscr{A}_1$ 与 $\mathscr{A}_2$ 之间的交换子
$\delta_h f(x) := f(x+h) - f(x)$	差分算子，并可以对任意的 $k \in \mathbb{N}$ 递归地定义 $\delta_h^{(k)} := \delta_h \delta_h^{k-1}$

概率相关记号

$\mathcal{P}(E)$	某个可测空间 E 上的所有概率测度组成的空间，其中的拓扑由测度的弱收敛定义
a.e.	几乎处处
$\mathbb{1}_A$	集合 A 的示性函数
$(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$	完备概率空间
$\mathcal{C}_T := C([0,T]; \mathbb{R}^{2d})$	从 $[0,T]$ 到 $\mathbb{R}^{2d}$ 的连续函数全体组成的轨道空间，其上的可测集由柱集生成
$z_t(\omega) := (x_t(\omega), v_t(\omega)) := \omega_t \quad \forall \omega \in \mathcal{C}_T$	$\mathbb{R}^{2d}$ 值的坐标过程，其中 x_t, v_t 为 $\mathbb{R}^d$ 值的坐标过程
$\mathscr{B}_t := \sigma(z_s, s \leqslant t)$	轨道空间上的自然 σ-代数流
$\mathbf{E}$	在本学位论文中指代抽象完备概率空间 $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ 上的期望
$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$	对于 $\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathcal{C}_T)$, $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}$ 为轨道空间基于概率测度 $\mathbb{P}$ 的期望. 当没有歧义时，我们简记轨道空间上的期望为 $\mathbb{E}$.

此外, 除非特殊说明, 我们还使用如下约定:

- 设 Ω 是 $\mathbb{R}^d$ 上的区域, 对任意的 $p \in [1, \infty)$, 我们使用 $L^p(\Omega)$ 表示 Ω 上 p 阶可积函数, $L^p_{loc}(\Omega)$ 表示 Ω 上 p 阶局部可积函数. 对 $p = \infty$, 我们使用 $L^\infty(\Omega)$ 表示 Ω 上的有界函数. 特别地, 记 $L^p := L^p(\mathbb{R}^d)$ 并赋予范数 $\|\cdot\|_p$.
- 设 $\mathbb{B}$ 为一 Banach 空间, 对任意的 $T > 0$ 记

$$\mathbb{L}^\infty_T \mathbb{B} := L^\infty([0,T]; \mathbb{B}), \quad \mathbb{L}^\infty_{loc}(\mathbb{B}) := \cap_{T>0} \mathbb{L}^\infty_T \mathbb{B}, \quad \mathbb{L}^\infty_T := L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^d).$$

- 在本学位论文，尤其是在绪论中，总是将 $\mathbf{C}_a^{-\alpha-} := \cup_{\varepsilon>0} \mathbf{C}_a^{-\alpha-\varepsilon}$ 和 $\mathbf{C}^{-\alpha-} := \cup_{\varepsilon>0} \mathbf{C}^{-\alpha-\varepsilon}$.

- 本学术论文采用 Einstein 求和约定: 当一个指标成对出现时, 就表示遍历其取值范围求和.
- 本论文中所出现的带指标或不带指标的常数 c 或 C, 在不同位置可能取值不同.

第一章　绪论

本学位论文主要研究下面带有随机环境噪声的动理学平均场随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = V_t\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}V_t = W(t, Z_t)\mathrm{d}t + (K * \mu_{X_t})(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}B_t, \tag{1.1}$$

其中 $Z_t := (X_t, V_t)$ 代表了粒子的位置和速度，μ_{X_t} 是 X_t 的分布，$(B_t)_{t\geqslant 0}$ 是一个 d 维标准布朗运动, 其代表了某些粒子之间可能发生的碰撞等一些随机现象，$K : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为粒子之间的交互作用核函数，

$$K * \mu(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(x - y)\mu(\mathrm{d}y), \quad \forall \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d).$$

对于某个 $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 和 $T > 0$，

$$W = (X_1, \cdots, X_d) \in (L^\infty_T \mathbf{C}^{-\alpha}_a(\rho))^d, \tag{1.2}$$

是一个各个分量互相独立的高斯随机场，代表了系统中的环境噪声，一般为空间上的白噪声或有色噪声. 这里的 ρ 是一个多项式权，$\mathbf{C}^{-\alpha}_a(\rho)$ 是带权各向异性 Besov 空间 (见定义 2.1.3). 这样的随机微分方程也被称作分布依赖的随机微分方程或是 McKean-Vlasov 方程. 该模型最早由 McKean 在 [77] 中提出，其中以 Vlasov 方程为例，研究了一类与非线性微分方程有关的马氏过程.

假设噪声 W 和交互核 K 都很光滑且对于任意的 $t \geqslant 0$, Z_t 的分布关于勒贝格测度有概率分布密度 $u(t) = u(t, x, v)$，由 Itô 公式，我们发现

$$\partial_t u = \Delta_v u - v \cdot \nabla_x u - \mathrm{div}_v(Wu) - K * \langle u\rangle \cdot \nabla_v u, \quad u(0) = u_0, \tag{1.3}$$

其中 $\langle u\rangle(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} u(t, x, v)\mathrm{d}v$ 代表 t 时刻，x 处的质量分布，

$$K * \langle u\rangle(t, x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(x - y)\langle u\rangle(t, y)\mathrm{d}y.$$

这样带有 $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ 的模型被称为动理学方程. 动理学方程描述了电子、离子、分子、天体或其他物质的分布函数 $u(t, x, v)$ 关于时间的演化过程. 当没有环境噪声，即 $W \equiv 0$ 时，动理学方程已经被广泛研究，常见的模型有 Boltzmann 方程 (参考 [18])、Landau 方程 (参考 [70, 71])、Vlasov-Poisson 方程 (参考 [13, 72]) 等，且可应用于天体物理学、航空航天工程、核工程、粒子-流体相互作用、半导体技术、社会科学和生物学中的趋化现象，我们将在下面的第 1.1.1 小节展开关于动理学方程的介绍.

同时, 注意到 W 并不是函数而是一个奇异的广义函数, 从而导致(1.1)不能逐条轨道定义, 甚至 (1.3) 在广义函数的意义下也不能定义, 具体来说 Wu 是不良定的. 该现象也出现在诸如 KPZ 方程 (参见 [65]), Φ^4 随机量子场论 (参见 [41]) 等模型中. 这种方程被称为奇异随机偏微分方程. 为了给这类方程一个定义以及求解该方程, Hairer 和 Gubinelli-Imkeller-Perkowski 分别在 [52] 和 [46] 中建立了正则结构理论和拟控制计算. 此后这两类理论被应用到越来越多的模型中 (参考 [34,40,47,48,83–85]). 但是, 除了最近讨论 Lie 群上正则结构理论可行性的文章 [76] 之外, 关于 (1.3) 这类非一致椭圆的奇异随机偏微分理论还没有任何结果.

本学位论文的主要目标是建立随机动理学方程的拟控制计算并得到奇异平均场动理学随机微分方程 (1.1) 的适定性. 在本章中, 我们将具体的给出动理学方程和奇异随机偏微分方程的研究背景, 并简单陈述本学位论文的主要工作、证明方法和工作安排.

1.1 研究背景

1.1.1 粒子系统和动理学方程

1.1.1.1 N 粒子系统和混沌传播

相互作用粒子系统是当下一个时期非常受关注的研究对象. 我们假设在空间 $\mathbb{R}^d$ 中有 N 个粒子, 每个粒子 i, $i = 1, 2, .., N$, 拥有两个观测量, 分别为 t 时刻的位置 $X_t^{N,i}$ 和速度 $V_t^{N,i}$. 设只有每两个粒子之间才有相互作用力 K, 这个力通常是某些势能的梯度, 即对于势能 $U : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$, $K = \nabla U$. 在随机环境噪声 W 和可能出现的随机现象的共同影响下, 由牛顿第二定律我们有:

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t^{N,i} = V_t^{N,i}\mathrm{d}t, & i = 1, 2, \cdots, N, \\ \mathrm{d}V_t^{N,i} = \Big[W(t, Z_t^{N,i}) + \frac{1}{N}\sum_{j\neq i} K(X_t^{N,i} - X_t^{N,j})\Big]\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}B_t^i, \end{cases} \tag{1.4}$$

其中的随机现象我们由完备滤波概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}; (\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0})$ 上的一族独立同分布的布朗运动 $(B_t^i)_{i\in\mathbb{N}}$ 模拟且 $Z_t^{N,i} := (X_t^{N,i}, V_t^{N,i})$. 我们将会在下面的第 4.3 节中给出环境噪声 W 的具体定义和需要满足的条件. 值得注意的是通常这种噪声可以由一族独立同分布的高斯随机变量平均逼近得出 (参考 [89, 注 2.2]).

系统 (1.4) 中交互核 K 前面的尺度系数 $\frac{1}{N}$ 被称为平均场尺度, 它保持了总系统的质量守恒, 即 N 个粒子的质量在平均场尺度下始终保持单位 1. 该尺度也是保证粒子系统 (1.4) 收敛到非平凡极限的临界尺度, 对于其中的细节, 我们推荐读者参考 [60, 第 1.1 节].

当 $U(x)=1/|x|^{d-2}$ 为牛顿位势时，粒子系统 (1.4) 是经典的 2 体交互牛顿动力系统. 除此之外，粒子系统模型有着非常广泛的应用. 例如，在等离子物理中该模型可以近似代表 Vlasov-Poisson 方程中的离子和电子 (参考 [17,106]); 在生物领域，它可以刻画种群个体的聚合效应 (参看 [37,97]) 以及描述癌细胞的增长 (参考 [36]). 详见 [98] 和最近的综述文章 [19,20,42,60,62].

由于粒子数量 N 异常庞大, 跟踪和模拟粒子系统 (1.4) 是极度复杂且费时费力的. 比如对于一些经典的物理模型, N 有 10^{25} 的数量级; 在典型的生物模型下 N 也有 10^9 数量级左右 (参见 [60, 第 1.2 节]). 哪怕 $N=4$ 或 5, 模拟相对应的非随机粒子系统也会遇到混沌现象从而无法准确跟踪 (参看 [109]). 但幸运的是，基于大数定律，我们可以形式上用下面的平均场方程可以近似地模拟大数量的粒子系统：

$$\mathrm{d}\bar{X}_t^i=\bar{V}_t^i\mathrm{d}t,\ \ \mathrm{d}\bar{V}_t^i=W(t,\bar{Z}_t^i)\mathrm{d}t+(K*\mu_{\bar{X}_t^i})(\bar{X}_t^i)\mathrm{d}t+\sqrt{2}\mathrm{d}B_t^i, \tag{1.5}$$

其中 $\bar{Z}_t^i:=(\bar{X}_t^i,\bar{V}_t^i)$ 且 $\mu_{\bar{X}_t^i}$ 为 $\bar{X}_t^i$ 的分布. 实际上，当 K 和 W 都是全局 Lipschitz 函数时，众所周知 (1.4) 和 (1.5) 都有唯一的强解，且下面的混沌传播成立 (见 [95, 定理 1.4])：设 $Z_0^{N,i}=\bar{Z}_0^i$ 且 $\{\bar{Z}_0^i\}_{i=1}^\infty$ 是独立同分布的随机变量，则对于任意的 $i\in\mathbb{N}$ 和 $T>0$,

$$\sup_N\sqrt{N}\mathbf{E}\left(\sup_{t\in[0,T]}|Z_t^{N,i}-\bar{Z}_t^i|\right)<\infty. \tag{1.6}$$

注意到 $(\bar{Z}^i_\cdot)_{i\in\mathbb{N}}$ 是独立同分布的随机过程. 这说明随着粒子数量的增加，它们之间的交互是越来越弱的，最后它们会变得相互无关且依赖于自己的全局分布 $\mu_{\bar{X}_t^i}$. 另一方面，令 $u_N(t):=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\delta_{Z_t^{N,i}}$ 是 N 个粒子的经验分布. 由 (1.4) 和 Itô 公式，我们发现对于任意的 $\phi\in C_b^2(\mathbb{R}^{2d})$,

$$\mathrm{d}\langle u_N,\phi\rangle=\langle u_N,\Delta_v\phi+v\cdot\nabla_x\phi+(W+K*\langle u_N\rangle)\cdot\nabla_v\phi\rangle\mathrm{d}t+\frac{\sqrt{2}}{N}\sum_{i=1}^N\nabla_v\phi\big(Z_t^{N,i}\big)\mathrm{d}B_t^i. \tag{1.7}$$

其中，由 Itô 等距公式，我们有

$$\mathbf{E}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\int_0^t\nabla_v\phi\big(Z_s^{N,i}\big)\mathrm{d}B_s^i\right|^2=\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^N\mathbf{E}\int_0^t\big|\nabla_v\phi\big(Z_s^{N,i}\big)\big|^2\mathrm{d}s\leqslant\frac{t\|\nabla_v\phi\|_\infty}{N}\to0.$$

特别地，我们形式上得到了 (1.7) 中的每一项都收敛到 (1.3) 中对应的那一项. 若 $W,K\in C_b^\infty$, 则众所周知 $\bar{Z}_t^i$ 的分布 $\mu(t)$ 有一个光滑的密度 $u(t)$ 且满足(1.3). 我们注意到当环境噪声 $W=W(\omega)$ 依赖概率空间元素 ω 时, 在关于 W 的条件期望意义下，经验测度 $u_N(t)$ 依然会收敛到 $u(t)$. 这意味着条件混沌传播依然成立 (详见 [25]).

在本学位论文中，我们将 (1.1) 和 (1.3) 视为带有随机系数的随机微分方程和偏微分方程，即我们固定几乎处处的 ω，对于确定的广义函数 $W(\omega)$ 求解随机微分方程 (1.1) 和偏微分方程 (1.3).

关于平均场极限和粒子系统的混沌传播最早由 McKean 在 [77] 中对于光滑系数情况进行了研究，其他有关的经典结果详见文章 [95]. 关于具体的二维 Biot-Savart 核情况，Osada 于 [82] 中给出了相关结果. 近些年来，对于非退化平均场极限的研究有了突破性进展，尤其是关于奇异交互核，其中代表性的工作有 Jabin-Wang [63]. 对于一类 $W^{-1,\infty}$ 核，他们给出了平均场极限的量化估计. 此外，还有关于涡度模型的结果 [39] 和其他类型的奇异交互核情形 [96]. 当 (1.5) 中的 $W\equiv 0$ 且 $K\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ 时，Jabin 和 Wang 亦在 [61] 中研究了偏微分方程 (1.3) 的适定性和动理学平均场极限的混沌传播速率.

另一方面，在关于分布依赖的随机微分方程的适定性领域，Funaki [38] 是一个开创性的工作，其中他严格地给出了分布依赖随机微分方程非线性鞅问题解的定义. 随后，有关分布依赖随机微分方程的结果如雨后春笋般地涌现 (参考 [78, 94, 107] 和这些文章中的参考文献). 最近，也有一些工作研究了随机环境噪声 W 对于平均场极限和分布依赖随机微分方程的影响 (例如 [25, 55, 92] 和其中的参考文献). 然而，据我们所知，其中的大部分工作只研究了非退化模型，且噪声 W 被要求为迹类噪声，即 W 关于空间变量有逐点的函数表示，并不能是一个分布. 因此，关于诸如白噪声之类的奇异环境噪声对于分布依赖随机微分方程影响的研究，目前还是空白.

1.1.1.2 动理学方程的背景和尺度分析

动理 (kinetic) 一词源于希腊语 $\kappa\acute{\iota}\nu\eta\sigma\iota\varsigma$，意思为运动. 动理学方程即是研究粒子分布动态演变的一类模型. 动理学的研究始于 19 世纪的下半叶. 1867 年，在奠定电磁学基础两年后，Maxwell 发表了一篇关于气体动理学理论的基础论文 [75]，其中他根据气体速度的分布函数的某些“矩”描述了气体的演化. 这启发了 Boltzmann 研究了以他著名的动理学方程 — Boltzmann 方程，并从中得出了重要的 H 定理以及与熵的联系 (见 [10]). 随后，在 1916 年和 1917 年，Chapman 和 Enskog 分别独立地得到了有关动理学方程的流体力学极限. 其中他们把 Boltzmann 方程在 Maxwell 不变分布下的小扰动解进行 Hilbert 展开，从而在一定的物理条件下证明了一阶项关于 Navier-Stokes 方程的收敛性. 这项工作后来在二战曼哈顿计划中的气体扩散铀浓缩方法中得到应用. 因此，曼哈顿计划的官方“Smyth 报告”将该方法称为 Chapman-Enskog 方法 (也见 [21]). 注意到上述研究的模型是下面的 Boltzmann 方程

$$\partial_t u + v\cdot\nabla_x u = Q(u,u), \tag{1.8}$$

其中 $Q(u,u)$ 是积分形式的非局部碰撞算子，具体的定义参看 [18]. 但是，在 1938 年，Vlasov 发现基于 Boltzmann 方程的标准动理学方法在应用于描述具有长程 Coulomb 位势的相互作用等离子体时存在困难 (见 [105]). 于是，他随后提出了无碰撞的 Vlasov-Poisson 方程：

$$\partial_t u + v\cdot\nabla_x u + (\nabla U * \langle u\rangle)\cdot\nabla_v u = 0,$$

其中 $U=U(x)$ 为 Coulomb 位势. 同时，在 1936 年，Landau 第一次用局部算子代替非局部碰撞算子 Q，在 Coulomb 交互核的情况下得到了 Landau 动理学方程. 当该方程与 Vlasov 方程一起使用时，可以描述产生碰撞的等离子体的时间演化过程，因此它被认为是碰撞等离子体理论中的主要动理学模型 (见 [70]). 此后亦有很多工作致力于解释 Boltzmann 方程和 Landau 方程之间的关系 (例如 [71,104]). 因此考虑下面的局部 Laplace 算子驱动的动理学方程是有意义的：

$$\mathscr{L}u := (\partial_t - \Delta_v - v\cdot\nabla_x)u = f. \tag{1.9}$$

1931 年, 在论文 [66] 中，Kolmogorov 首次以概率的角度将偏微分方程这一分析工具用于对随机过程的研究. 特别地, 1934 年，Kolmogorov 在文章 [67] 中发现尽管上述动理学方程 (1.9) 有着强退化性，但是它的基本解光滑且该基本解是下面随机过程的时间边缘分布密度：

$$(\sqrt{2}\int_0^t B_s\mathrm{d}s, \sqrt{2}B_t),$$

其中 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 为标准布朗运动. 结合 Landau 的理论，可以发现由布朗运动 $(B_t)_{t\geqslant 0}$ 在 (1.1) 中描述可能发生的碰撞现象在某种意义下是合理的.

现在我们考虑下面的尺度变换：对于 $\lambda>0$ 和 $a,b,c>0$，令

$$u_\lambda(t,x,v) := \lambda^a u(\lambda^b t, \lambda^c x, \lambda v),\quad f_\lambda(t,x,v) := f(\lambda^b t, \lambda^c x, \lambda v).$$

易知

$$\mathscr{L}u_\lambda = f_\lambda \quad \text{当且仅当} \quad a=-2, b=2, c=3. \tag{1.10}$$

接下来我们考虑动理学方程 (1.9) 关于 x 方向和 v 方向的正则性提升效应. 假设对于某个 $\alpha\in(0,1)$ 和 $\beta,\gamma>0$，存在一个常数 $C>0$ 使得对于所有的 $\lambda>0$，

$$[u_\lambda]_{\mathbf{C}^{\alpha+\gamma}_x} \lesssim_C [f_\lambda]_{\mathbf{C}^\alpha_x},\quad [u_\lambda]_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta}_v} \lesssim_C [f_\lambda]_{\mathbf{C}^\alpha_v}. \tag{1.11}$$

上式中对于任意的 $\gamma>0$，

$$[g]_{\mathbf{C}^\gamma_x} := \sup_{h\in\mathbb{R}^d} \|\delta^{([\gamma]+1)}_{x;h} g\|_\infty/|h|^\gamma$$

其中 $\delta^{(1)}_{x;h}g(x,v) := g(x+h,v) - g(x,v)$，且 $\delta^{(M+1)}_{x;h} = \delta^{(1)}_{x;h}\delta^{(M)}_{x;h}$, $[g]_{\mathbf{C}^\beta_v}$ 的定义类似. 注意到

$$[u_\lambda]_{\mathbf{C}^{\alpha+\gamma}_x} = \lambda^{3(\alpha+\gamma)-2}[u]_{\mathbf{C}^{\alpha+\gamma}_x}, \quad [f_\lambda]_{\mathbf{C}^\alpha_x} = \lambda^{3\alpha}[f]_{\mathbf{C}^\alpha_x},$$

和

$$[u_\lambda]_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta}_v} = \lambda^{\alpha+\beta-2}[u]_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta}_v}, \quad [f_\lambda]_{\mathbf{C}^\alpha_v} = \lambda^{\alpha}[f]_{\mathbf{C}^\alpha_v}.$$

从而，为了使得 (1.11) 关于 λ 一致成立，我们有

$$\gamma = 2/3, \quad \beta = 2.$$

换言之，形式上讲，动理学方程 (1.9) 的解 u 对于非齐次项 f 分别在 x 和 v 方向有 $\frac{2}{3}$ 和 2 的正则性提升. 于是，下面形式的 Schauder 估计是合理的：对于任意的 $\alpha,\beta > 0$，存在一个常数 $C = C(\alpha,\beta,d) > 0$ 使得

$$\|u\|_{L^\infty_T\mathbf{C}^{\alpha+2/3}_x} + \|u\|_{L^\infty_T\mathbf{C}^{\beta+2}_v} \lesssim_C \|f\|_{L^\infty_T\mathbf{C}^\alpha_x} + \|f\|_{L^\infty_T\mathbf{C}^\beta_v}, \tag{1.12}$$

其中 $\mathbf{C}^\alpha_x$ 和 $\mathbf{C}^\beta_v$ 分别为 x 和 v 方向的 Hölder 空间. 鉴于 x 和 v 之间不同的尺度和正则性提升，本学位论文在各向异性空间中研究动理学方程 (1.3) (关于具体的各向异性空间内容参看第 2.1.1 节).

当 $\alpha = \beta/3 > 0$ 时，Schauder 估计 (1.12) 已经被很多的人研究，例如 [73]，[90] (有关非局部算子的情形参考 [57]，[59]). 此外，[14] 得到了极大 L^p-正则性估计 (关于随机版本的参看 [27], [58]，[112]). 值得注意的是在研究动理学算子的 Schauder 估计时，[59] 引入了 Lie 群的概念来定义动理学 Hölder 空间 (更早的相关工作见 [87]). 在本论文中，我们并没有使用群的语言也给出了与之等价的动理学 Hölder 空间的定义.

基于上面的 Schauder 估计的结果，当 $K \equiv 0$ 时，Chaudru de Raynal [22]，Wang-Zhang [108]，Zhang [110] 和 Chaudru de Raynal-Menozzi [23] 等工作分别在 W 属于 Hölder 空间，Sobolev 空间和 $L^q_tL^p_{x,v}$ 空间时得到了随机微分方程 (1.1) 的适定性 (对于跳过程驱动的参考 [57]). 对于分布依赖的情况，方程 (1.1) 弱解的存在性在 [111] 中被研究，其中 K 属于某些 $L^q_tL^{p_x}_xL^{p_v}_v$ 空间；当交互核 K 只是某些分布时，在最近的工作 [56] 中，动理学平均场随机微分方程解的适定性被给出，其中 K 可以是 Biot-Savart 核和 Coulomb 核.

1.1.2 奇异随机偏微分方程

1.1.2.1 奇异随机动理学方程的引出– (1.1)的鞅解

在本节中，我们介绍奇异随机偏微分方程的背景. 首先，为了得到平均场随机微分方程 (1.1) 的适定性，我们需要给出解的定义. 本学位论文采用鞅解的定义方式. 即

考虑下面的倒向非散度型动理学方程

$$\partial_t u + \Delta_v u + v \cdot \nabla_v u + W \cdot \nabla_v u + K * \mu_{X_t} \cdot \nabla_v u + f = 0, \quad u_T = \varphi. \tag{1.13}$$

基于 [35] 中的广义鞅问题，我们类似地称轨道空间上的一个概率测度 $\mathbb{P}$ 是一个鞅解，如果对于任意的光滑函数 f 和 φ，和 (1.13) 的解 u，有

$$M_t := u(t, z_t) - u(0, z_0) - \int_0^t f(s, z_s) \mathrm{d}s$$

是 $\mathbb{P}$-鞅，其中 $z_t = (x_t, v_t)$ 是轨道过程，且 $\mathbb{P}$ 关于 x_t 方向的边缘分布就是 μ_{X_t} (详见定义 6.0.1). 当 W 是某些好函数时，容易发现这种定义与下面经典的鞅解定义是等价的：对于任意的光滑函数 f，

$$M_t := f(z_t) - f(z_0) - \int_0^t (\Delta_v + v \cdot \nabla_x + W \cdot \nabla_v + K * \mu_{X_t} \cdot \nabla_v) f(s, z_s) \mathrm{d}s$$

是 $\mathbb{P}$-鞅. 但此定义方法在我们这里有一个本质问题，即 $W(t, z_t)$ 没有意义. 因此我们希望利用动理学算子的正则性，得到方程 (1.13) 一个逐点定义的函数解 u，从而使得上面关于广义鞅问题解的定义有意义. 为此我们首先考虑下面最简单的奇异随机动理学方程：

$$\partial_t u = \Delta_v u + v \cdot \nabla_x u + W \cdot \nabla_v u + f. \tag{1.14}$$

注意到为了简单起见我们使用时间变换将倒向方程变为正向. 由 (1.2) 和 (1.12)，我们发现当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，解 u 最好的正则性只能是 $L^\infty_T \mathbf{C}^{2-\alpha}_a$，从而 $W \cdot \nabla u : \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}-}_a \times \mathbf{C}^{\frac{1}{2}-}_a$ 在经典的广义函数乘积的框架下无法良定 (参见下面的 (2.41)). 同样的问题也出现在如下的 KPZ 方程 (见 [65])

$$\partial_t h = \Delta h + |\nabla h|^2 + \xi, \tag{1.15}$$

和下面的有关 Φ^4_d 随机量子场的方程 (见 [41]) 中

$$\partial_t \phi = \Delta \phi - \phi^3 + \xi, \tag{1.16}$$

其中 ξ 是一个时空白噪声. 由热方程和时空白噪声的正则性可知 $\nabla h \cdot \nabla h$ 和当 $d \geqslant 2$ 时的 ϕ^3 都是不能在经典意义下良定义的项. 对于 Φ^4_2 模型, 可以通过 Da Prato-Debussche 技巧来使得方程良定 (参见 [1,30,79]). 但关于一维 KPZ 方程和 Φ^4_3 模型，如何使得方程可定义一直是一个学术界的公开问题. 对此，一个重大的突破来自 Hairer 和他 [52] 中提出的正则结构理论. 基于此理论，对于上述方程他给出了合理的重整化定义方法，并且在环面上得到了一维 KPZ 方程的全局解和 Φ^4_3 方程的局部解. 与之平行地，在综

合 [43] 中带有控制的粗轨道想法和 [11] 中介绍的仿积计算方法后，Gubinelli，Imkeller 和 Perkowski 在 [46] 中提出了拟控制计算，且基于此亦在环面上得到了一维 KPZ 方程的全局适定性和 Φ^4_d 模型的局部适定性 (也参见 [49]). 最近，这两种理论方法已经被成功地用于解决很多不同类型的不良定模型，例如时空白噪声驱动的 Navier-Stokes 方程 (见 [115, 116])，sine-Gordon 模型 (见 [54])，拟线性的奇异随机偏微分方程 (见 [40, 83–85])，奇异噪声驱动的 Schrödinger 方程 (见 [34]) 和噪声驱动的波方程 ([47, 48]) 等. 从思想性来讲，正则结构方法和拟控制计算都受到了带有控制的粗轨道思想的影响，见 [74] 和 [43]. 两个方法最重要的不同是正则结构在局部上考虑问题，但拟控制计算通过使用 Fourier 变换和卷积算子在全局上考虑问题. 我们推荐读者参考 [4]，[5] 和其中的参考文献来更加深入地理解两者之间的关系.

在本篇学位论文中，我们将主要建立由噪声 W 驱动的奇异动理学方程 (1.14) 的拟控制计算方法.

1.1.2.2 拟控制计算

在本节中，我们将简要介绍由传输噪声影响的线性热方程的拟控制计算方法，期望为读者理解本学位论文的内容提供帮助. 首先，我们考虑下面的方程

$$\partial_t u = \Delta u + \eta \cdot \nabla u + f, \quad u_0 = 0, \tag{1.17}$$

其中 f 是光滑函数，$\eta \in \mathbf{C}^{-\alpha}$ 是某个噪声，$\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ (空间 $\mathbf{C}^{-\alpha}$ 的定义参看下面的定义 2.1.3). 由经典热半群 $e^{t\Delta}$ 的 Schauder 估计可知，解最好的正则性为 $\mathbf{C}^{2-\alpha}$，从而 $\eta \cdot \nabla u$ 是不良定的. 定义

$$I := \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathrm{d}s.$$

由 Duhamel 公式可知，当 $\eta \cdot \nabla u$ 足够正则的时候，我们有下面的表达:

$$u = I(\eta \cdot \nabla u + f).$$

拟控制计算的核心想法是将 $\eta \cdot \nabla u$ 的不良定性通过一些仿积运算和交换子转移到 $\eta \circ \nabla I\eta$ 这个项上，其中 $\circ$ 是仿积运算中的共振项. 即

$$fg = f \prec g + f \circ g + f \succ g, \tag{1.18}$$

严格的数学定义见 (2.14). 虽然 $\eta \circ \nabla I\eta : \mathbf{C}^{-\alpha} \times \mathbf{C}^{1-\alpha}$ 在仿积运算 (见下面的 (2.40)) 的意义下依然不良定，但我们可以利用 η 的概率性质，通过概率计算使得这一项在几乎处处的意义下进行定义，此想法被称为重整化计算 (例如下面的定理 4.3.1).

接下来我们将具体展示如何将 $\eta\cdot\nabla u$ 转变为 $\eta\circ\nabla I\eta$. 首先我们将 $\eta\cdot\nabla u$ 进行如下的 Bony 仿积分解

$$\eta\cdot\nabla u=\nabla u\succcurlyeq\eta+\nabla u\prec\eta.$$

根据 [46, 引理 2.1] (亦可参考下面的引理 2.2.1), 其中第一项虽然不良定但是我们可以假设它有更高的正则性 $\mathbf{C}^{1-2\alpha}$，第二项虽然正则性只有 $\mathbf{C}^{-\alpha}$ 但它是良定的. 因此，我们希望解 u 有下面的表示：

$$\begin{cases}u=I(\nabla u\prec\eta)+u'+If,\\ u'=I(\nabla u\succ\eta)+I(\nabla u\circ\eta),\end{cases}\tag{1.19}$$

其中 u' 是 u 正则的部分，形式上看它有 $3-2\alpha$ 的正则性. 这时，我们根据 (1.19) 可以将 $\nabla u\circ\eta$ 定义为

$$\nabla u\circ\eta:=(\nabla I(\nabla u\prec\eta)+\nabla u'+\nabla If)\circ\eta,$$

其中 $\nabla u'\circ\eta$ 和 $\nabla If\circ\eta$ 都是可以在 (2.40) 的经典意义下良定的，因为 $2-3\alpha>0$. 这时我们只需计算

$$\nabla I(\nabla u\prec\eta)\circ\eta\quad\text{和}\quad\nabla u\prec(\nabla I\eta\circ\eta)$$

之间的交换子，因为我们可以通过概率给第二项一个严格的定义并得到正则性估计. Gubinelli，Imkeller 和 Perkowski 在 [46] 中做出了下面的分解

$$\begin{aligned}&\nabla I(\nabla u\prec\eta)\circ\eta-\nabla u\prec(\nabla I\eta\circ\eta)\\&=([\nabla I,\nabla u\prec]\eta))\circ\eta+\mathrm{com}(\nabla u,\nabla I\eta,\eta)=:\mathrm{Com}_1+\mathrm{Com}_2,\end{aligned}$$

其中 $[\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2]:=\mathscr{A}_1\mathscr{A}_2-\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$ 为交换子，$\mathrm{com}(f,g,h):=(f\prec g)\circ h-f(g\circ h)$ (严格定义参见下面的引理 2.2.4). 注意到这里的 Com_1 是有关热半群的交换子，而 Com_2 和方程结构没有任何关系. 最后，真正的拟控制解的定义如下

$$\begin{cases}u=\nabla u\prec I\eta+u^\sharp+If,\\ u^\sharp=I(\nabla u\succ\eta)+I(\nabla u\circ\eta)+\mathrm{Com}_1,\end{cases}\tag{1.20}$$

其中

$$\begin{aligned}\nabla u\circ\eta:=&\nabla u^\sharp\circ\eta+\nabla If\circ\eta+(\nabla^2u\prec I\eta)\circ\eta\\&+\nabla u(\nabla I\eta\circ\eta)+\mathrm{Com}_2.\end{aligned}\tag{1.21}$$

上述关于 u 的分解也被叫做拟控制拟设，详见后面的定义 5.1.1.

当我们考虑动理学模型 (1.14) 时，由于和方程无关，交换子 Com_2 的估计是简单的，这时主要的问题是如何计算有关于动理学算子半群的交换子估计 Com_1 以及动理

学算子半群影响下 $\eta\circ\nabla I\eta$ 的重整化，这里的重整化计算在很多相关工作中亦是非常重要的 (参考 [49, 第九节，第十节]). 因此，为了建立动理学算子框架下的拟控制计算，本学位论文的一个重点是给出 Com_1 和 $\eta\circ\nabla I\eta$ 的估计.

1.1.2.3 全空间噪声权重的影响

让我们回到动理学方程 (1.3)，这时一个自然的想法是在全空间考虑该模型，因为速度 v 在物理上是取值于全空间的. 继而，系统中的环境噪声 W 只能存在于带权空间中. 这使得我们不能简单地在同一个空间使用不动点定理证明方程的适定性. 目前解决此困难的方法主要有两个：一个是使用依赖时间变量的指数权函数，该方法在 [53] 中被提出；另一个是 [114] 中基于局部化的技巧.

在本篇学位论文中，我们采用 [114] 中的局部化技巧. 此外，我们在本篇文章中进一步先验地给出了拟控制解的局部化定理 (见命题 5.1.1). 因此我们可以直接由该命题证明带有多项式权的拟控制解的存在唯一性. 值得注意到是，[114] 中的唯一性依然是由指数权得到的.

这类在全空间由带权噪声影响的奇异随机微分方程，最近已经被越来越多的学者关注和研究，例如 [44,79,80] 中的 Φ^4_d 模型和 [88,114] 中的 KPZ 方程和奇异 HJB 方程.

1.1.2.4 奇异漂移系数随机微分方程的相关结果

在第 1.1.1.2 小节的最后，我们介绍了一些有关动理学随机微分方程的适定性结果. 在本小节中我们介绍带有随机噪声环境的非退化随机微分方程的结果.

有关下面的带有奇异分布值漂移项的随机微分方程的研究在近年来吸引了很多学者的目光 (例如 [16,31,68,113] 等)

$$\mathrm{d}X_t = W(t, X_t)\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t.$$

诸如此类的奇异扩散在很多的随机媒介中出现，其中最著名的是 Brox 扩散 (见 [15])，其中 $W = W(x) \in \mathbf{C}^{-\frac{1}{2}-}$ 为一维空间白噪声. 当 $d = 1$ 时，基于粗轨道的理论，Delarue 和 Dielthe 在 [31] 中研究了这类随机微分方程. 在 [16] 中，利用拟控制计算，Cannizzaro 和 Chouk 证明了高维带有奇异漂移项的随机微分方程鞅解的适定性 (关于 α-稳定过程的情况参考 [68]). 值得注意的是对于动理学系统 (1.1)，到目前为止还没有类似的结果.

1.2 本学位论文的主要目标及证明方法概述

1.2.1 主要目标和结论

本学位论文的目标是关于高斯噪声 W 提出合适的条件假设 (见**定理 4.3.1**)，从而建立奇异线性动理学方程 (1.14) 的拟控制计算 (见**定理 5.3.1**)，进一步对有界交互核 K 得到 (1.1) 的广义非线性鞅问题解的适定性 (见**定理 6.0.1**) 以及证明非线性动理学 Fokker-Planck 方程 (1.3) 的适定性 (见**定理 7.0.1**). 此外，在**定理 7.0.1**中，我们还可以说明 (1.1) 的广义非线性鞅问题解的时间边缘分布密度满足对应的非线性动理学 Fokker-Planck 方程 (1.3).

1.2.2 证明方法

我们首先基于 Gubinelli，Imkeller 和 Perkowski 在 [46] 中提出的拟控制计算理论和 [114] 中提出的局部化方法给出全空间奇异线性动理学方程 (1.14) 解的定义与适定性. 为此，我们提出了动理学 Hölder 空间并证明 Schauder 估计，接着最重要的是建立有关动理学算子类似 (1.20) 中半群交换子 Com_1 的估计 (见引理 2.2.4) 并计算有关噪声在动理学算子半群作用下的概率重整化 (见第四章)，其中我们将可以通过概率重整化定义 $\eta \circ \nabla I\eta$ 的分布 η 称为可重整化向量 (详见第 4.1节). 然后通过类似 (1.20) 和 (1.21) 的拟控制拟设方法，我们在第 5.1 节给出了线性方程 (1.13) 拟控制解的定义，并通过选取适当的逼近序列，在命题 5.1.1 中先验地给出一个局部化拟控制解的结果. 根据此结果，我们不再需要 [114] 中证明带权方程唯一性的指数权技巧 (见 [114, 附录 A]). 最后，我们利用动理学 Hölder 空间的局部化引理 (引理 3.2.3) 和 [114] 中提出的局部化方法证明拟控制解的适定性 (见定理 5.3.1).

其次我们基于有关奇异线性动理学方程 (1.14) 的结论，采用 [35] 中广义鞅问题和 [38] 中非线性鞅问题的定义方法，提出了依赖于线性化奇异动理学方程适定性的广义非线性鞅问题解的定义 (见定义 6.0.1). 利用偏微分方程的估计、定理 5.3.1 和 Itô-Tanaka 技巧得到一致的矩估计 (6.8), 从而得到胎紧性结果 (见引理 6.0.1), 进一步证明定理 6.0.1 中的存在性结果. 随后我们使用线性化鞅问题的唯一性和 [94] 中 Girsanov 变换的方法得到广义非线性鞅问题解的唯一性.

最后我们考虑带有奇异环境噪声的非线性动理学 Fokker-Planck 方程 (1.3). 我们把熵方法与上面奇异线性方程 (1.14) 的估计结果相结合，得到解的先验能量估计和熵估计 (见引理 7.0.3). 据此证明解的存在唯一性.

1.2.3 后续工作

我们希望在未来考虑以下几个方面的工作:

1. 本学位论文并没有尝试与正则结构的已有工作进行比较，且尚不清楚是否可以基于我们的方法建立动理学算子在正则结构中的相关理论. 在这方面，最近有关于 Lie 群上正则结构理论可行性讨论的文章 [76]，我们并没有给出与之具体的比较. 这会是我们下一步的研究方向.
2. 我们没有研究粒子系统 (1.4) 的混沌传播. 其中的问题主要集中在我们没有得到带有奇异环境噪声的粒子系统 (1.4) 的适定性. 一旦证明该适定性, 基于定理 6.0.1 的唯一性和磨光方法，利用 [69] 中的结果，我们可以直接推出相应的混沌传播速率. 此处讨论的问题是我们正在准备进行研究的.
3. 在本学位论文的研究过程中，我们同样得到了类似 [53] 中的与动理学算子有关的指数权结果，但是因为我们的结果全部在多项式权重中考虑，所以该指数权并没有体现在本学位论文中. 此指数权的应用会作为我们后面的研究对象，例如是否可以应用到动理学抛物 Anderson 模型甚至是动理学 Φ^4 模型和 KPZ 模型中去.
4. 在添加假设 $\mathrm{div}_v W \equiv 0$ 后，我们发现可以通过不同于拟控制拟设方法定义方程和定义解. 详细的定义方法见注 7.0.1的 (iii). 这时，我们希望可以去掉 [113] 中 $\alpha < 1/2$ 的限制. 这是我们正在考虑和进行的工作.

1.3 工作安排

本学位论文包括七个章节. 除去绪论 (**第一章**) 外，其他章节的具体安排如下:

第二章 我们介绍了本学位论文中的预备知识. 具体地，在第 2.1 节，我们介绍了带权各向异性 Besov 空间，以及有关该空间的嵌入定理，插值定理和一个常用的等价刻画. 在第 2.2 节, 我们介绍了经典 Bony 仿积的运算结果，并给出了拟控制计算中一个重要的交换子估计，引理 2.2.4 (参考 [46, 引理 2.4]).

第三章 我们在第 3.1 节建立动理学算子半群的最优正则性估计. 随后，在 3.2 节，我们引入与经典定义不同的动理学 Hölder 空间并给出相关性质和局部刻画. 基于此空间，我们在第 3.3 节证明关于线形动理学方程的 Schauder 估计. 最后在第 3.4 节，利用 Schauder 估计和 [57, 引理 6.7] 的重要观察，我们得到拟控制计算中类似 (1.20) 中 Com_1 的交换子估计.

第四章 我们首先在第 4.1 节介绍可重整化对的概念. 接着在第 4.2 节用谱测度定义噪声，并在第 4.3 节基于谱测度的条件假设，给出噪声属于可重整化对的主要定理 (定理 4.3.1). 详细的证明见第 4.4 节. 其中在第 4.3.1 小节，我们给出满足定理中谱

测度条件的例子，包括 v 方向的白噪声和 x 方向 Hurst 指数大于 $\frac{5}{9}$ 的分数阶布朗运动的导数.

第五章 我们基于第二，三，四章的结果，在第 5.1 节中我们定义了奇异线性动理学方程 (1.14) 的拟控制解，并在本章的剩余部分中证明了 (1.14) 的适定性. 为此，我们首先建立关于拟控制解的局部化先验结果 (见命题 5.1.1)，并使用 [114] 中的局部化技巧，将带权的方程局部化，使之转变为无权系数的方程. 接着在第 5.2 节通过引入耗散项和利用极大值原理，得到无权方程关于系数 Besov 范数的多项式依赖的一致估计. 进一步在第 5.3 节通过带权空间的局部刻画，证明原方程的适定性.

第六章 我们得到了奇异动理学平均场随机微分方程 (1.1) 广义非线性鞅解的适定性. 首先我们利用倒向线性化的奇异动理学 Kolomogorov 方程定义广义非线性鞅解. 接着由第五章中得到的关于线性方程 (1.13) 的估计和 Itô-Tanaka 技巧, 我们给出了逼近解的一致矩估计，继而得到胎紧性. 为了得到极限为原广义非线性鞅问题的解，我们利用 (1.13) 的解关于 μ 的连续依赖性. 在证明唯一性时，我们首先给出了广义线形鞅问题解的唯一性 (即 $K \equiv 0$)，进而使用 Girsanov 变换和 Gronwall 不等式得到非线性问题解的唯一性.

第七章 在 $\mathrm{div}_v W \equiv 0$ 的假设下，我们得到了非线性动理学 Fokker-Planck 方程 (1.3)的适定性. 我们首先利用熵方法给出逼近解的一致能量估计和熵估计，其中得到能量估计的过程中，我们再一次使用了 Itô-Tanaka 技巧，利用随机微分方程和偏微分方程的关系以及第五节中得到的结果. 继而根据一致的能量估计，我们有了逼近解的一致可积性，从而得到在 L^1 空间中的收敛. 到此为止，存在性已经得到. 作为熵估计的副产品，我们同样得到了解关于 v 方向的导数在 $L_t^2 L^1$ 空间的一致估计，基于此估计，我们得到解的唯一性.

第二章　预备知识

2.1 带权各向异性 Besov 空间

在本节, 我们介绍带权的各项异性的 Besov 空间以及它的性质. 关于带权的 Besov 空间, 在调和分析领域已经有了很多经典结论, 参见 [32] 和 [101]. 因为我们在本论文中需要的关于各向异性的结果很难在文献中找到, 并且为了读者的方便, 所以我们在本节会给出有关结果的详细证明.

2.1.1 基本记号与定义

固定 $N,n\in\mathbb{N}$. 令 $m=(m_1,...,m_n)\in\mathbb{N}^n$ 和 $a=(a_1,...,a_n)\in[1,\infty)^n$. 假设 $N\geqslant n$ 且 $m_1+\cdots+m_n=N$. 我们首先介绍下面的在 $\mathbb{R}^N$ 上的各向异性距离: 对任意的 $x=(x_1,..,x_n),y=(y_1,..,y_n)\in\mathbb{R}^{m_1}\times\cdots\mathbb{R}^{m_n}=\mathbb{R}^N$,

$$|x-y|_a:=\sum_{i=1}^n|x_i-y_i|^{1/a_i},\tag{2.1}$$

其中 $|\cdot|$ 是欧式空间 $\mathbb{R}^{m_i}$ 的经典欧式范数. 对于 $x=(x_1,..,x_n)\in\mathbb{R}^N$, $t\geqslant 0$ 和 $s\in\mathbb{R}$, 定义

$$t^{sa}x:=(t^{sa_1}x_1,...,t^{sa_n}x_n)\in\mathbb{R}^N,\quad B^a_t:=\{x\in\mathbb{R}^N:|x|_a\leqslant t\}.\tag{2.2}$$

明显的, 我们有

$$|t^a x|_a=t|x|_a,\quad t\geqslant 0.\tag{2.3}$$

接下来我们回顾 [101] 中关于允许权的定义.

定义 2.1.1 一个在 $\mathbb{R}^N$ 上 C^∞ 光滑的的函数 $\rho:\mathbb{R}^N\to(0,\infty)$ 被称为是一个允许权, 若对于所有的 $j\in\mathbb{N}$, 存在常数 $C_j>0$ 对所有的 $x\in\mathbb{R}^N$,

$$|\nabla^j\rho(x)|\leqslant C_j\rho(x),\tag{2.4}$$

且存在常数 $C,\kappa>0$, 对所有的 $x,y\in\mathbb{R}^N$,

$$\rho(x)\leqslant C\rho(y)(1+|x-y|_a^\kappa).\tag{2.5}$$

记由所有允许权组成的空间为 $\mathscr{W}$.

对于任意的 $\rho \in \mathscr{W}$ 和 $p \in [1,\infty]$, 定义

$$\|f\|_{L^p(\rho)} := \|\rho f\|_p := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\rho(x)f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

特别地, 当 $p=\infty$,

$$\|f\|_{L^\infty(\rho)} := \|\rho f\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\rho(x)f(x)|.$$

令 $L^p(\rho)$ 为包含所有 $\|\cdot\|_{L^p(\rho)}$ 范数有限的函数的空间. 易知该空间为 Banach 空间. 记 $L^p := L^p(1)$. 取 ρ_1,ρ_2,ρ_3 为三个允许权. 假设存在一个常数 $C_1>0$ 使得对所有的 $x,y\in\mathbb{R}^N$,

$$\rho_1(x) \leqslant C_1\rho_2(y)\rho_3(x-y).$$

由经典的卷积形式的 Young 不等式, 我们得到如下结果

$$\|f*g\|_{L^q(\rho_1)} \leqslant C_1C_2\|f\|_{L^r(\rho_2)}\|g\|_{L^p(\rho_3)}, \tag{2.6}$$

其中 $r,p,q\in[1,\infty]$ 满足 $1/q+1=1/p+1/r$, 且 $C_2=C_2(r,p,q)>0$.

令 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 为包含 $\mathbb{R}^N$ 上所有速降函数的 Schwartz 空间. 给定 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, 记 $\hat{f}$ 为 f 的 Fourier 变换

$$\hat{f}(\xi) := (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{-i\xi\cdot x} f(x)\mathrm{d}x, \quad \xi\in\mathbb{R}^N,$$

记 $\check{f}$ 为 f 的逆 Fourier 变换

$$\hat{f}(x) := (2\pi)^{-N/2}\int_{\mathbb{R}^N} e^{i\xi\cdot x} f(\xi)\mathrm{d}\xi, \quad x\in\mathbb{R}^N.$$

众所周知, Fourier 变换和逆 Fourier 变换都是 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 上的同构变换, 即是一对一的连续映射, 且 $\check{\hat{f}}=f$ (参见 [3]).

令 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 为 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 的共轭空间, 即从 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 到 $\mathbb{R}$ 的连续线性算子全体构成的空间, 又被称为缓增广义函数空间. 利用对偶性, 我们类似地定义 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 中任意元素的 Fourier 变换和逆 Fourier 变换.

为了引入带权各向异性 Besov 空间, 我们首先给出下面关于 $\mathbb{R}^N$ 的各向异性的二进圆环分解. 令 ϕ^a_{-1} 为 $\mathbb{R}^N$ 上的一个对称非负的 C^∞ 光滑函数, 且

$$\phi^a_{-1}(\xi)=1 \quad 当\ \xi\in B^a_{1/2}, \quad \phi^a_{-1}(\xi)=0 \quad 当\ \xi\notin B^a_{2/3}.$$

其中对称的定义为对于任意的 $i=1,..,n$ 和 $\xi=(\xi_1,..\xi_n)\in\mathbb{R}^N$,

$$\phi^a_{-1}(\xi_1,..,\xi_i,...,\xi_n)=\phi^a_{-1}(\xi_1,..,-\xi_i,...,\xi_n).$$

易知这样的函数 ϕ_{-1}^a 是存在的, 例如可以磨光 $B_{7/12}^a$ 上的示性函数. 对于任意的 $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)\in\mathbb{R}^{m_1}\times\cdots\times\mathbb{R}^{m_n}=\mathbb{R}^N$ 和 $j\geqslant 0$, 定义

$$\phi_j^a(\xi):=\phi_{-1}^a(2^{-a(j+1)}\xi)-\phi_{-1}^a(2^{-aj}\xi). \tag{2.7}$$

由定义可得对于任意的 $j\geqslant 0$, $\phi_j^a(\xi)=\phi_0^a(2^{-aj}\xi)$ 且

$$\mathrm{supp}\phi_j^a\subset B_{2^{j+2}/3}^a\backslash B_{2^{j-1}}^a,\quad \sum_{j=-1}^{n}\phi_j^a(\xi)=\phi_{-1}^a(2^{-a(n+1)}\xi)\to 1,\quad n\to\infty. \tag{2.8}$$

定义 2.1.2 给定 $j\geqslant -1$, 定义在 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 上的分块算子 $\mathcal{R}_j^a$ 由如下广义函数意义下的卷积给出:

$$\mathcal{R}_j^a f(x):=(\phi_j^a\hat{f})\check{}(x)=\check{\phi}_j^a*f(x).$$

对于所有的 $j\leqslant -2$, 记 $\mathcal{R}_j^a\equiv 0$. 特别地,

$$\mathcal{R}_j^a f(x)=2^{(a\cdot m)j}\int_{\mathbb{R}^N}\check{\phi}_0^a(2^{aj}y)f(x-y)\mathrm{d}y, \tag{2.9}$$

其中 $a\cdot m=a_1m_1+\cdots+a_nm_n$.

给定 $j\geqslant -1$, 由定义易得

$$\mathcal{R}_j^a=\mathcal{R}_j^a\tilde{\mathcal{R}}_j^a,\quad 其中\ \tilde{\mathcal{R}}_j^a:=\mathcal{R}_{j-1}^a+\mathcal{R}_j^a+\mathcal{R}_{j+1}^a, \tag{2.10}$$

且 $\mathcal{R}_j^a$ 在如下的意义下是对称的

$$\langle g,\mathcal{R}_j^a f\rangle=\langle\mathcal{R}_j^a g,f\rangle,\quad f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^N),g\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N), \tag{2.11}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为 $S(\mathbb{R}^N)$ 与 $S'(\mathbb{R}^N)$ 之间的对偶. 令

$$\widetilde{\phi_j^a}:=\phi_{j-1}^a+\phi_j^a+\phi_{j+1}^a,\quad j\geqslant -1.$$

注意到

$$\tilde{\mathcal{R}}_j^a f(x)=\check{\tilde{\phi}}_j^a*f(x)=2^{(a\cdot m)j}\int_{\mathbb{R}^N}\check{\tilde{\phi}}_0^a(2^{aj}y)f(x-y)\mathrm{d}y,\quad j\geqslant 1, \tag{2.12}$$

其中

$$\widetilde{\phi_0^a}(\xi):=2^{a\cdot m}\phi_0(2^a\xi)+\phi_0(\xi)+2^{-a\cdot m}\phi_0(2^{-a}\xi).$$

关于缓增广义函数低频部分的截断算子 S_k 定义为

$$S_k f := \sum_{j=-1}^{k-1} \mathcal{R}_j^a f \to f \quad \text{在 } \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) \text{ 中, 当 } k \to \infty. \tag{2.13}$$

对于任意给定的 $f, g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, 定义下面的仿积运算

$$f \prec g := \sum_{k \geqslant -1} S_{k-1} f \mathcal{R}_k^a g, \quad f \circ g := \sum_{|i-j| \leqslant 1} \mathcal{R}_i^a f \mathcal{R}_j^a g, \quad f \succ g := g \prec f.$$

此外我们定义

$$f \succcurlyeq g := f \succ g + f \circ g.$$

fg 的 Bony 分解可以由下面的式子形式上给出 (参见 [3])

$$fg = f \prec g + f \circ g + f \succ g. \tag{2.14}$$

在 Bony 分解中, 下面的观察是关键的

$$\mathcal{R}_j^a (S_{k-1} f \mathcal{R}_j^a g) = 0, \quad \forall |k-j| > 3. \tag{2.15}$$

实际上, 基于 Fourier 变换, 我们有

$$\big(\mathcal{R}_j^a (S_{k-1} f \mathcal{R}_j^a g)\big)\hat{} = \phi_j^a \cdot \sum_{i=-1}^{k-2} (\phi_i^a \hat{f}) * (\phi_k^a \hat{g}).$$

因为函数 $(\phi_i^a \hat{f}) * (\phi_k^a \hat{g})$ 的支撑集包含在 $B^a_{2^{k+1}} \backslash B^a_{2^k/6}$ 中，所以

$$\phi_j^a \cdot \sum_{i=-1}^{k-2} (\phi_i^a \hat{f}) * (\phi_k^a \hat{g}) = 0, \quad \forall |k-j| > 3,$$

进而, (2.15) 成立.

现在我们给出如下定义的带权各向异性 Besov 空间 (参见 [32]).

定义 2.1.3 取 $\rho \in \mathscr{W}$, $p, q \in [1, \infty]^2$ 和 $s \in \mathbb{R}$. 带权各向异性 Besov 空间 $\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)$ 由如下方式定义

$$\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho) := \left\{ f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N) : \|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)} := \left(\sum_{j \geqslant -1} 2^{sjq} \|\mathcal{R}_j^a f\|^q_{L^p(\rho)} \right)^{1/q} < \infty \right\}.$$

为了记号方便, 简记

$$\mathbf{C}^s_a(\rho) := \mathbf{B}^{s,a}_{\infty,\infty}(\rho) \quad \mathbf{C}^s_a := \mathbf{C}^s_a(1), \quad \mathbf{B}^{s,a}_{\infty,\infty} := \mathbf{B}^{s,a}_{\infty,\infty}(1),$$

且当 $a = (1, .., 1)$ 时, 我们将去掉上述记号中的角标 a.

2.1.2 嵌入、插值与对偶性质

我们首先给出下面的 Bernstein 不等式.

引理 2.1.1 令 $\rho \in \mathscr{W}$.

(i) 对于任意 $k \in \mathbb{N}_0$, $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ 和 $i = 1, 2, .., n$, 存在一个常数 $C = C(\rho, m, p, q, a, k, i) > 0$ 使得对所有的 $j \geqslant -1$,

$$\|\nabla_{x_i}^k \mathcal{R}_j^a f\|_{L^q(\rho)} \lesssim_C 2^{j(a_i k + a\cdot m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}, \tag{2.16}$$

其中 $\nabla_{x_i}^k$ 为关于分量 x_i 的 k 阶梯度, 且

$$\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} \lesssim_C \|f\|_{L^p(\rho)}. \tag{2.17}$$

此外对于任意的 $k \in \mathbb{N}$,

$$\|S_k f\|_{L^p(\rho)} \lesssim_C \|f\|_{L^p(\rho)}. \tag{2.18}$$

(ii) 对于任意 $s \in \mathbb{R}$ 和 $p \in [1, \infty]$, 存在一个常数 $C = C(\rho, m, p, a) > 0$ 使得对所有的 $j \geqslant -1$,

$$\|J_s \mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} \asymp 2^{sj} \|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}, \tag{2.19}$$

其中 $\widehat{J_s f}(\xi) := \left(\sum_{i=1}^n (1 + |\xi_i|^2)^{1/(2a_i)}\right)^s \hat{f}(\xi)$.

注 2.1.1 值得注意的是因为 $\xi \to \left(\sum_{i=1}^n (1 + |\xi_i|^2)^{1/(2a_i)}\right)^s \phi_j^a(\xi)$ 依然是速降函数, 所以对于任意的 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$, $J_s \mathcal{R}_j^a f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 是良定的.

证明 (i) 首先注意到由 (2.10), (2.5) 和 (2.6) 可得

$$\|\nabla_{x_i}^k \mathcal{R}_j^a f\|_{L^q(\rho)} = \|(\nabla_{x_i}^k \check{\tilde{\phi}}_j^a) * \mathcal{R}_j^a f\|_{L^q(\rho)} \lesssim \|(1 + |\cdot|_a)^\kappa \nabla_{x_i}^k \check{\tilde{\phi}}_j^a\|_{L^r} \|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)},$$

其中 $1/p + 1/r = 1 + 1/q$, κ 为(2.5)中常数. 当 $j = -1, 0$ 时, 由于 $\widetilde{\phi}_0^a, \widetilde{\phi}_1^a$ 都是速降函数, 我们可以直接得到 (2.16).

当 $j \geqslant 1$, 因为 $\kappa \geqslant 0$, 所以由 (2.12) 我们有

$$\begin{aligned}
\|(1 + |\cdot|_a)^\kappa \nabla_{x_i}^k \check{\tilde{\phi}}_j^a\|_{L^r} &\leqslant 2^{a_i k j} 2^{(a\cdot m)j(1-\frac{1}{r})} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\check{\tilde{\phi}}_0^a(x)|^r (1 + |2^{-aj} x|_a^\kappa)^r\right)^{1/r} \\
&\leqslant 2^{j(a_i k + (a\cdot m)(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}))} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla_{x_i}^k \check{\tilde{\phi}}_0^a(x)|^r (1 + |x|_a^\kappa)^r\right)^{1/r},
\end{aligned}$$

进而我们得到 (2.16). 对于 (2.17) 的估计是类似的. 注意到

$$S_k f(x) = 2^{(a\cdot m)n} \int_{\mathbb{R}^N} \check{\phi}_{-1}^a (2^{na}(x - y)) f(y) \mathrm{d}y,$$

基于上面的方法我们可以得到 (2.18).

(ii) 依然基于 (2.10), (2.5) 和 (2.6), 我们类似地有

$$\|J_s\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} \lesssim \|(1+|\cdot|_a)^\kappa J_s\check{\widetilde{\phi}}_j^a\|_{L^1}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}.$$

对于 $j=-1,0$, 我们可以直接得到

$$\|J_s\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} \lesssim \|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}.$$

对于 $j\geqslant 1$, 注意到基于定义, 由变量替换可得

$$(J_s\check{\widetilde{\phi}}_j^a)\hat{} = \left(\sum_{i=1}^n (1+|\xi_i|^2)^{1/(2a_i)}\right)^s \widetilde{\phi}_j^a(\xi) = 2^{sj}F_{s,j}(2^{-aj}\xi),$$

其中

$$F_{s,j}(\xi) := \left(\sum_{i=1}^n (2^{-2a_ij}+|\xi_i|^2)^{1/(2a_i)}\right)^s \widetilde{\phi}_0^a(\xi).$$

因为 $\mathrm{supp}(\phi_0^a)\subset B_2^a\backslash B_{1/2}^a$, 所以对于任意的 $k\in\mathbb{N}_0$ 和 $i=1,2,..,n$,

$$\sup_{j\geqslant 1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla_{\xi_i}^k F_{s,j}(\xi)|\mathrm{d}\xi<\infty,$$

继而

$$\sup_{j\geqslant 1}\sup_{x\in\mathbb{R}^N}(1+|x_i|^k)|\check{F}_{s,j}(x)|<\infty.$$

因此,

$$\begin{aligned}\|(1+|\cdot|_a)^\kappa J_s\check{\widetilde{\phi}}_j^a\|_{L^1} &= 2^{sj}2^{(a\cdot m)j}\int_{\mathbb{R}^N}|\check{F}_{s,j}(2^{aj}x)|(1+|x|_a^\kappa)\mathrm{d}x\\ &= 2^{sj}\int_{\mathbb{R}^N}|\check{F}_{s,j}(x)|(1+|2^{-aj}x|_a^\kappa)\mathrm{d}x\\ &\leqslant 2^{sj}\int_{\mathbb{R}^N}|\check{F}_{s,j}(x)|(1+|x|_a^\kappa)\mathrm{d}x \lesssim 2^{sj}.\end{aligned}$$

综上, 对任意的 $j\geqslant -1$

$$\|J_s\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} \lesssim_C 2^{sj}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}. \qquad \square$$

因为 $J_sJ_{-s}=\mathrm{Id}$, 所以我们也可以由此得到另外一边的不等式估计.

注 2.1.2 由带权的各向异性 Besov 空间的定义和 (2.19), 对任意的 $\rho \in \mathscr{W}$, $p, q \in [1, \infty]$ 和 $s, s' \in \mathbb{R}$, J_s 是 $\mathbf{B}^{s'+s}_{p,q}(\rho)$ 和 $\mathbf{B}^{s';a}_{p,q}(\rho)$ 之间的同构, 即

$$J_s \mathbf{B}^{s'+s,a}_{p,q}(\rho) = \mathbf{B}^{s',a}_{p,q}(\rho). \tag{2.20}$$

作为 Bernstein 不等式的应用, 我们有下面的关于带权各向异性 Besov 空间的嵌入定理.

定理 2.1.1 令 $\rho \in \mathscr{W}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $1 \leqslant r \leqslant p \leqslant \infty$ 满足下面的等式

$$s_2 = s_1 + (a \cdot m)(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}).$$

对于任意的 $q \in [1, \infty]$, 存在一个常数 $C = C(\rho, m, a, p, q, r, s_1, s_2) > 0$ 使得

$$\|f\|_{\mathbf{B}^{s_1;a}_{p,q}(\rho)} \leqslant C \|f\|_{\mathbf{B}^{s_2;a}_{r,q}(\rho)}. \tag{2.21}$$

同时, 对于任意的 $1 \leqslant q_1 \leqslant q_2 \leqslant \infty$, $s \in \mathbb{R}$ 和 $\rho_2 \leqslant \rho_1$,

$$\|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q_2}(\rho_2)} \leqslant C \|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q_1}(\rho_1)}. \tag{2.22}$$

且给定满足下式的 $\theta \in (0, 1)$, $p_1, p_2, p \in [1, \infty]$, $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{W}$ 和 $s, s_1, s_2 \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\theta}{p_1} + \frac{1-\theta}{p_2} = \frac{1}{p}, \quad \theta s_1 + (1-\theta) s_2 = s,$$

对于任意的 $q \in [1, \infty]$, 下面的不等式成立

$$\|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho_1^\theta \rho_2^{1-\theta})} \leqslant \|f\|^\theta_{\mathbf{B}^{s_1,a}_{p_1,q}(\rho_1)} \|f\|^{1-\theta}_{\mathbf{B}^{s_2,a}_{p_2,q}(\rho_2)}. \tag{2.23}$$

证明 首先将 $k = 0$ 带入 (2.16), (2.21) 直接由定义可得. 其次 (2.22) 和 (2.23) 是 Hölder 不等式和 Besov 空间定义的直接推论. □

我们紧接着介绍下面有关插值的引理.

引理 2.1.2 令 $\{T_j\}_{j=-1}^\infty$ 为一族从 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 到某一 Banach 空间 $\mathbb{X}$ 的线性映射. 假设对于某两个实数 $\beta_0 < \beta_1$ 和任意的 $j \geqslant -1$，存在常数 C_{ij}, $i = 0, 1$ 使得

$$\|T_j f\|_{\mathbb{X}} \leqslant C_{ij} 2^{-j\beta_i} \|f\|_{\mathbf{C}^{\beta_i}_a}, \quad i = 0, 1.$$

那么对于任意的 $\beta \in (\beta_0, \beta_1)$，存在一个常数 $C = C(a, m, \beta, \beta_0, \beta_1) > 0$ 使得对任意的 $j \geqslant -1$,

$$\|T_j f\|_{\mathbb{X}} \leqslant C(C_{0j} + C_{1j}) 2^{-j\beta} \|f\|_{\mathbf{C}^\beta_a}.$$

证明 因为对于任意的 $k \geqslant -1$,

$$\|\mathcal{R}_k^a f\|_{\mathbf{C}_a^{\beta_i}} \lesssim 2^{(\beta_i-\beta)k}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta}, \quad i=0,1,$$

所以由假设可得

$$\begin{aligned}
\|T_j f\|_{\mathbb{X}} &\leqslant \sum_{k\geqslant -1}\|T_j\mathcal{R}_k^a f\|_{\mathbb{X}} \leqslant C_{0j}2^{-j\beta_0}\sum_{k>j}\|\mathcal{R}_k^a f\|_{\mathbf{C}_a^{\beta_0}} + C_{1j}2^{-j\beta_1}\sum_{k\leqslant j}\|\mathcal{R}_k^a f\|_{\mathbf{C}_a^{\beta_1}} \\
&\lesssim \left(C_{0j}2^{-j\beta_0}\sum_{k>j}2^{(\beta_0-\beta)k} + C_{1j}2^{-j\beta_1}\sum_{k\leqslant j}2^{(\beta_1-\beta)k}\right)\|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta} \\
&\lesssim (C_{0j}+C_{1j})2^{-j\beta}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta}.
\end{aligned}$$

证毕. □

除了嵌入不等式 (2.21), (2.22) 和插值结果 (2.23), 引理 2.1.2 之外, 我们下面给出有关带权各向异性 Besov 空间的对偶性质.

引理 2.1.3 令 $\rho \in \mathscr{W}$ 且 $\rho^{-1} \in \mathscr{W}$, $s \in \mathbb{R}$ 和 $p,q,p',q' \in [1,\infty]$. 假设 $1/p + 1/p' = 1/q + 1/q' = 1$.

(i) 对于任意的 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 和 $f \in \mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)$,

$$|\langle f,\varphi\rangle| \leqslant \|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)}\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^{-s,a}(\rho^{-1})}.$$

(ii) 存在一个常数 $C = C(\rho,N,s,p,q) > 0$ 使得对于任意的 $f \in \mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)$,

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)} \leqslant C\sup_{\varphi\in\mathscr{S}}\langle f,\varphi\rangle/\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^{-s,a}(\rho^{-1})}.$$

证明 (i) 由 (2.10) 和 Hölder 不等式, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle f,\varphi\rangle = \sum_{j\geqslant -1}\langle \mathcal{R}_j^a f, \widetilde{\mathcal{R}}_j^a\varphi\rangle &\leqslant \sum_{j\geqslant -1}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\|\widetilde{\mathcal{R}}_j^a\varphi\|_{L^{p'}(\rho^{-1})} \\
&\leqslant \|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)}\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^{-s,a}(\rho^{-1})}.
\end{aligned}$$

(ii) 这里我们采用 [3] 中的证明方法. 对于任意的 $M \in \mathbb{N}$, 令

$$U_M^{q'} := \Big\{(c_j)_{j\in\mathbb{N}} : \sum_{j\leqslant M}|c_j|^{q'} \leqslant 1,\ c_j = 0, \quad j > M\Big\}.$$

基于空间 $\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)$ 的定义, 我们有

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)} = \lim_{M\to\infty}\left(\sum_{j\leqslant M}2^{jsq}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}^q\right)^{1/q}$$

$$= \lim_{M\to\infty} \sup_{(c_j)\in U_M^{q'}} \sum_{j\leqslant M} c_j 2^{js} \|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}.$$

固定 $\varepsilon > 0$ 和 $(c_j)_{j\in\mathbb{N}} \in U_M^{q'}$. 因为

$$\|g\|_{L^p} = \sup_{h\in\mathscr{S}} \langle g, h\rangle / \|h\|_{L^{p'}},$$

所以对于任意的 $j \leqslant M$，存在一个 $\|\psi\|_{L^{p'}} = 1$ 的 $\psi_j \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 使得

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} &\leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \rho(x)\mathcal{R}_j^a f(x)\psi_j(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon 2^{-js}}{(|c_j|+1)(j^2+1)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\mathcal{R}_j^a(\rho\psi_j)(x)\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon 2^{-js}}{(|c_j|+1)(j^2+1)}.\end{aligned}$$

接下来我们定义速降函数

$$\varphi_M^{(c_j)}(x) := \sum_{j\leqslant M} c_j 2^{js} \mathcal{R}_j^a(\rho\psi_j)(x),$$

则

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)} \leqslant \lim_{M\to\infty} \sup_{(c_j)\in U_M^{q'}} \langle f, \varphi_M^{(c_j)}\rangle + \sum_{j\geqslant -1} \frac{\varepsilon}{j^2+1}. \tag{2.24}$$

注意到由 (2.17),

$$\begin{aligned}\|\varphi_M^{(c_j)}\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^{-s,a}(\rho^{-1})}^{q'} &= \sum_{k\geqslant -1} 2^{-kq's} \left\| \sum_{j\leqslant M, |j-k|\leqslant 3} c_j 2^{js} \mathcal{R}_k^a \mathcal{R}_j^a(\rho\psi_j) \right\|_{L^{p'}(\rho^{-1})}^{q'} \\ &\lesssim \sum_{j\leqslant M} c_j^{q'} \|\rho\psi_j\|_{L^{p'}(\rho^{-1})}^{q'} = \sum_{j\leqslant M} c_j^{q'} \|\psi_j\|_{L^{p'}}^{q'} = \sum_{j\leqslant M} c_j^{q'} \leqslant 1.\end{aligned} \tag{2.25}$$

因此，由 (2.24) 和 (2.25)，

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)} \leqslant C \sup_{\varphi\in\mathscr{S}} \langle f, \varphi\rangle / \|\varphi\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^{-s,a}(\rho^{-1})} + \sum_{j\geqslant -1} \frac{\varepsilon}{j^2+1}. \qquad \square$$

令 $\varepsilon \to 0$, 引理得证.

2.1.3 带权各向异性 Besov 空间的等价刻画

在本小节中，我们将给出带权各向异性 Besov 空间的一个等价刻画 (即下面的 (2.29)) 以及基于该刻画得到的推论. 为此我们首先介绍一些记号. 对任意的可测函数 $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ 和 $\mathbb{R}^N$ 中向量 h，一阶差分算子的定义如下:

$$\delta_h f(x) := f(x+h) - f(x),$$

且对任意的 $M\in\mathbb{N}$，M-阶的差分算子由下面的方式迭代定义

$$\delta_h^{(M+1)}f(x):=\delta_h\delta_h^{(M)}f(x). \tag{2.26}$$

根据归纳可得

$$\delta_h^{(M)}f(x)=\sum_{k=0}^{M}(-1)^{M-k}\binom{M}{k}f(x+kh),\quad h\in\mathbb{R}^N, \tag{2.27}$$

其中 $\binom{M}{k}$ 是组合数. 现在我们给出下面的有关带权各向异性 Besov 空间的等价刻画. 我们认为这个结果是经典的，但是并没有在有关文献中找到。因此，为了读者的方便，这里我们会给出详细的证明.

定理 2.1.2 令 $\rho\in\mathscr{W}$ 且 $\rho^{-1}\in\mathscr{W}$. 对于任意的 $s\in(0,\infty)$ 和 $p,q\in[1,\infty]$, 存在一个常数 $C=C(\rho,a,m,p,q,s)\geqslant 1$ 使得对于任意的 $f\in\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)$,

$$\|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)}\asymp_C\|f\|_{\widetilde{\mathbf{B}}^{s,a}_{p,q}(\rho)}\asymp_C\|\rho f\|_{\widetilde{\mathbf{B}}^{s,a}_{p,q}}, \tag{2.28}$$

其中

$$\|f\|_{\widetilde{\mathbf{B}}^{s,a}_{p,q}(\rho)}:=\left(\int_{|h|_a\leqslant 1}\left(\frac{\left\|\delta_h^{([s]+1)}f\right\|_{L^p(\rho)}}{|h|_a^s}\right)^q\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}\right)^{1/q}+\|f\|_{L^p(\rho)},$$

这里的 $[s]$ 是 s 的整数部分.

此外，对于任意的 $s\in\mathbb{R}$ 和 $p,q\in[1,\infty]$,

$$\|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)}\asymp_C\|\rho f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}}. \tag{2.29}$$

注 2.1.3 (i) 注意到所有的 $\rho\in\mathscr{W}$ 都是速降函数空间 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 的乘子, 即对任意的 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$, $f\to\rho f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$. 利用对偶性, 我们知道 ρ 也是 $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 空间上的乘子. 因此上述定义中出现的 $\rho f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^N)$ 是良定的. 特别地，当 $s>0$ 时，$f\in\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)\subset L^p(\rho)$ 是一个真实的函数，从而 $\delta_h f$ 也是良定的.

(ii) 对于 $\rho\equiv 1$，刻画 (2.28) 的证明在 [112, 引理 2.8] 中被给出. 特别地，对于任意的 $s>0$，由 (2.28) 我们有

$$\|f\|_{\mathbf{C}^s_a(\rho)}\asymp_C\|f\|_{\mathbf{C}^{s/a_1}_{x_1}(\rho)}+\cdots+\|f\|_{\mathbf{C}^{s/a_n}_{x_n}(\rho)}, \tag{2.30}$$

其中对于 $i=1,..,n$,

$$\|f\|_{\mathbf{C}^s_{x_i}(\rho)}:=\|f\|_{L^\infty(\rho)}+\sup_{|h_i|\leqslant 1}\frac{\left\|\delta_{h_i}^{([s]+1)}f\right\|_{L^\infty(\rho)}}{|h_i|^{s/a_i}},$$

和

$$\delta_{h_i}f(x):=f(\cdots,x_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1},\cdots)-f(\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\cdots).$$

为了结果的连续性我们将定理 2.1.2 的证明放在本节最后，先由此得到下面的推论.

推论 2.1.1 令 $\rho \in \mathscr{W}$ 满足 $\rho^{-1} \in \mathscr{W}$. 对于任意的 $\alpha \in \mathbb{R}, s > 0$ 和 $p, q \in [1, \infty]$，存在一个常数 $C = C(\rho, a, m, p, q, \alpha, s) > 0$ 使得对与任意的 $f \in \mathbf{B}^{\alpha+s,a}_{p,q}(\rho)$ 和 $h \in \mathbb{R}^N$，

$$\|\delta_h^{([s]+1)} f\|_{\mathbf{B}^{\alpha,a}_{p,q}(\rho)} \lesssim_C |h|_a^s (1 + |h|_a^\kappa) \|f\|_{\mathbf{B}^{\alpha+s,a}_{p,q}(\rho)}, \tag{2.31}$$

其中 $\kappa \geqslant 0$ 为 (2.5) 中常数.

证明 基于 (2.28)，对任意的 $|h|_a \leqslant 1$，我们有

$$\|\delta_h^{([s]+1)} f\|_{L^p(\rho)} \lesssim |h|_a^s \|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,\infty}(\rho)}.$$

对于 $|h|_a > 1$，由 (2.27) 和 (2.5) 可得

$$\|\delta_h^{([s]+1)} f\|_{L^p(\rho)} \lesssim (1 + |h|_a^\kappa) \|f\|_{L^p(\rho)} \lesssim (1 + |h|_a^\kappa) \|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,\infty}(\rho)}.$$

因此，

$$\|\delta_h^{([s]+1)} f\|_{L^p(\rho)} \lesssim |h|_a^s (1 + |h|_a^\kappa) \|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,\infty}(\rho)}. \tag{2.32}$$

注意到

$$\|\mathcal{R}_j^a f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,\infty}(\rho)} = \sup_{k \geqslant -1} 2^{ks} \|\mathcal{R}_k^a \mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} \lesssim 2^{js} \|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)},$$

从而由 (2.32) 可得

$$\begin{aligned}
\|\delta_h^{([s]+1)} f\|^q_{\mathbf{B}^{\alpha,a}_{p,q}(\rho)} &= \sum_{j \geqslant -1} 2^{\alpha j q} \|\delta_h^{([s]+1)} \mathcal{R}_j^a f\|^q_{L^p(\rho)} \\
&\lesssim |h|_a^{qs} (1 + |h|_a^\kappa)^q \sum_{j \geqslant -1} 2^{\alpha j q} \|\mathcal{R}_j^a f\|^q_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,\infty}(\rho)} \\
&\lesssim |h|_a^{qs} (1 + |h|_a^\kappa)^q \sum_{j \geqslant -1} 2^{(\alpha+s) j q} \|\mathcal{R}_j^a f\|^q_{L^p(\rho)} \\
&= |h|_a^{qs} (1 + |h|_a^\kappa)^q \|f\|^q_{\mathbf{B}^{\alpha+s,a}_{p,q}(\rho)}.
\end{aligned}$$

证毕. □

在给出定理 2.1.2的证明之前，我们先介绍下面初等的计算结果.

引理 2.1.4 对于任意的 $\alpha>0$，存在一个常数 $C=C(N,a,m,\alpha)>0$ 使得对于所有的 $\lambda>0$，

$$\int_{|h|_a\leqslant\lambda}|h|_a^{\alpha-a\cdot m}\mathrm{d}h\lesssim_C\lambda^\alpha,\quad\int_{|h|_a>\lambda}|h|_a^{-\alpha-a\cdot m}\mathrm{d}h\lesssim_C\lambda^{-\alpha}.\tag{2.33}$$

证明 令 $h=(h_1,...,h_n)\in\mathbb{R}^{m_1}\times\cdots\mathbb{R}^{m_n}=\mathbb{R}^N$. 如下地定义变换 $h\to\tilde{h}$:

$$\widetilde{h}:=(\widetilde{h}_1,\cdots,\widetilde{h}_n),\quad\widetilde{h}_i:=|h_i|^{\frac{1}{a_i}-1}h_i.$$

显然，对于任意的 $i=1,..,n$,

$$|h_i|=|\widetilde{h}_i|^{a_i},\quad h_i=|\widetilde{h}_i|^{a_i-1}\widetilde{h}_i,$$

且

$$\big|\det(\partial h_i/\partial\widetilde{h}_i)\big|\leqslant a_i^{m_i}|\widetilde{h}_i|^{a_im_i-m_i}\leqslant a_i^{m_i}|\widetilde{h}|_1^{a_im_i-m_i},$$

其中 $\partial h_i/\partial\tilde{h}_i$ 为逆变换 $\tilde{h}_i\to h_i$ 的 Jacob 矩阵，且 $|\tilde{h}|_1:=\sum_{i=1}^n|\tilde{h}_i|$. 因此，基于变量替换，我们有

$$\begin{aligned}\int_{|h|_a\leqslant\lambda}|h|_a^{\alpha-a\cdot m}\mathrm{d}h&=\int_{|\widetilde{h}|_1\leqslant\lambda}|\widetilde{h}|_1^{\alpha-a\cdot m}\Pi_{i=1}^n\big|\det(\partial h_i/\partial\widetilde{h}_i)\big|\mathrm{d}\widetilde{h}\\&\leqslant\prod_{i=1}^n a_i^{m_i}\int_{|\widetilde{h}|_1\leqslant\lambda}|\widetilde{h}|_1^{\alpha-N}\mathrm{d}\widetilde{h}\lesssim\lambda^\alpha.\end{aligned}$$

类似地，

$$\int_{|h|_a>\lambda}|h|_a^{-\alpha-a\cdot m}\mathrm{d}h\leqslant\prod_{i=1}^n a_i^{m_i}\int_{|\widetilde{h}|_1>\lambda}|\widetilde{h}|_1^{-\alpha-N}\mathrm{d}\widetilde{h}\lesssim\lambda^{-\alpha}.$$

证毕. □

现在我们可以给出

证明 (**定理** 2.1.2 **的证明**) 我们的证明分为四分部分，在前三个部分我们证明 (2.28)，在第四部分我们利用 (2.28) 和对偶性质证明 (2.29).

(i) 在这一部分中，我们证明

$$\|f\|_{\widetilde{\mathbf{B}}^{s,a}_{p,q}(\rho)}\lesssim\|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)}.\tag{2.34}$$

简单起见，我们记 $M:=[s]+1$. 由 (2.5) 我们注意到

$$\|\delta_h\mathcal{R}_j^af\|_{L^p(\rho)}\lesssim(1+|h|_a^\kappa)\sum_{i=1}^n\|\delta_{h_i}\mathcal{R}_j^af\|_{L^p(\rho)},$$

其中对于 $h=(h_1,...,h_n)$ 和 $x=(x_1,..,x_n)$,

$$\delta_{h_i}f(x):=f(\cdots,x_{i-1},x_i+h_i,x_{i+1},\cdots)-f(\cdots,x_{i-1},x_i,x_{i+1}\cdots).$$

由归纳可知

$$\|\delta_h^{(M)}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\lesssim(1+|h|_a^{M\kappa})\sum_{i_1=1}^n\cdots\sum_{i_M=1}^n\|\delta_{h_{i_1}}\cdots\delta_{h_{i_M}}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}.$$

令 $|h|_a\leqslant 1$. 由 (2.5) 和 Bernstein 不等式 (2.16)，我们有

$$\begin{aligned}\|\delta_{h_{i_1}}\cdots\delta_{h_{i_M}}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}&\lesssim|h_{i_1}|\|\nabla_{x_{i_1}}\delta_{h_{i_2}}\cdots\delta_{h_{i_M}}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\\&\lesssim\cdots\cdots\cdots\\&\lesssim|h_{i_1}|\cdots|h_{i_M}|\,\|\nabla_{x_{i_1}}\cdots\nabla_{x_{i_M}}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\\&\lesssim|h_{i_1}|2^{a_{i_1}j}\cdots|h_{i_M}|2^{a_{i_M}j}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\\&\lesssim(2^j|h|_a)^{a_{i_1}+\cdots+a_{i_M}}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}.\end{aligned}$$

另外一方面，显然有

$$\|\delta_{h_{i_1}}\cdots\delta_{h_{i_M}}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\lesssim\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\|\delta_{h_{i_1}}\cdots\delta_{h_{i_M}}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}&\lesssim((2^j|h|_a)^{a_{i_1}+\cdots+a_{i_M}}\wedge 1)\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\\&\lesssim((2^j|h|_a)^M\wedge 1)\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)},\end{aligned}$$

其中第二个不等式源自于 $a_{i_1}+\cdots+a_{i_M}\geqslant M$. 所以我们可以得到

$$\|\delta_h^{(M)}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\lesssim((2^j|h|_a)^M\wedge 1)\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}=((2^j|h|_a)^M\wedge 1)2^{-sj}c_j,\tag{2.35}$$

其中

$$c_j:=2^{sj}\|\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}.$$

对于 $q=\infty$，我们有

$$\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}\leqslant\sum_j\|\delta_h^{(M)}\mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)}\lesssim\sum_j((2^j|h|_a)^M\wedge 1)2^{-sj}c_j\lesssim|h|_a^s\|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,\infty}(\rho)}.$$

接下来我们假设 $q\in[1,\infty)$. 对于所有的 $|h|_a\leqslant 1$ 的 $h\in\mathbb{R}^N$，我们选取 $j_h\in\mathbb{N}$ 使得

$$|h|_a^{-1}\leqslant 2^{j_h}\leqslant 2|h|_a^{-1}.\tag{2.36}$$

这时由 (2.35) 可得

$$\begin{aligned}\|\delta_h^{(M)} f\|_{L^p(\rho)} &\leqslant \sum_{j\geqslant -1} \|\delta_h^{(M)} \mathcal{R}_j^a f\|_{L^p(\rho)} \lesssim \sum_{j\geqslant -1} ((2^j|h|_a)^M \wedge 1) 2^{-sj} c_j \\ &\leqslant |h|_a^M \sum_{j<j_h} 2^{(M-s)j} c_j + \sum_{j\geqslant j_h} 2^{-sj} c_j =: I_1(h) + I_2(h).\end{aligned}$$

对于 $I_1(h)$，由 Hölder 不等式我们有

$$\begin{aligned}I_1^q(h) &\leqslant |h|_a^{qM} \left(\sum_{j<j_h} 2^{(M-s)j}\right)^{q-1} \sum_{j<j_h} 2^{(M-s)j} c_j^q \\ &\leqslant |h|_a^{M-s(1-q)} \sum_{j<j_h} 2^{(M-s)j} c_j^q.\end{aligned}$$

因此，基于 (2.36)，Fubini 定理和 (2.33)，

$$\begin{aligned}\int_{|h|_a\leqslant 1} |h|_a^{-sq} I_1^q(h) \frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}} &\leqslant \int_{|h|_a\leqslant 1} |h|_a^{M-s} \sum_{j<j_h} 2^{(M-s)j} c_j^q \frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}} \\ &\leqslant \sum_{j\geqslant -1} 2^{(M-s)j} c_j^q \int_{|h|_a\leqslant 2^{-j}} |h|_a^{M-s-a\cdot m} \mathrm{d}h \\ &\lesssim \sum_{j\geqslant -1} 2^{(M-s)j} c_j^q 2^{-(M-s)j} = \|f\|^q_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)}.\end{aligned}$$

相似地，我们有

$$\int_{|h|_a\leqslant 1} |h|_a^{-sq} I_2^q(h) \frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}} \lesssim \|f\|^q_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)}.$$

同时，对于 $s>0$，显然有

$$\|f\|_{L^p(\rho)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)}.$$

到此我们得到了 (2.34).

(ii) 在这一部分，我们证明 (2.34) 不等式的另外一边. 对于 $j\geqslant 0$，因为 $\int_{\mathbb{R}^N} \check{\phi}_j^a(h)\mathrm{d}h = (2\pi)^{N/2}\phi_j^a(0) = 0$，由 (2.27) 和变量替换，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \check{\phi}_j^a(h) \delta_h^{(M)} f(x)\mathrm{d}h &= \sum_{k=0}^M (-1)^{M-k} \binom{M}{k} \int_{\mathbb{R}^N} \check{\phi}_j^a(h) f(x+kh)\mathrm{d}h \\ &= \sum_{k=1}^M (-1)^{M-k} \binom{M}{k} \int_{\mathbb{R}^N} \check{\phi}_j^a(h) f(x+kh)\mathrm{d}h \\ &= \sum_{k=1}^M (-1)^{M-k} \binom{M}{k} \int_{\mathbb{R}^N} \phi_j^a(k\cdot\check{)}(h) f(x+h)\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

特别地，对于如下定义的函数

$$\phi_j^{a,M}(\xi) := (-1)^{M+1}\sum_{k=1}^{M}(-1)^{M-k}\binom{M}{k}\phi_j^a(k\xi), \quad j \geqslant -1,$$

我们有

$$(-1)^{M+1}\int_{\mathbb{R}^N}\check{\phi}_j^a(h)\delta_h^{(M)}f(x)\mathrm{d}h = [\phi_j^{a,M}]^\vee * f(x) =: \mathcal{R}_j^{a,M}f(x),$$

且当 $j \geqslant 0$ 时，

$$\|\mathcal{R}_j^{a,M}f\|_{L^p(\rho)} \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}|\check{\phi}_j^a(h)|\,\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}\mathrm{d}h = I_j^0 + I_j^1 + I_j^2,$$

其中

$$\begin{aligned}
I_j^0 &:= \int_{|h|_a>1}|\check{\phi}_j^a(h)|\,\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}\mathrm{d}h,\\
I_j^1 &:= \int_{|h|_a\leqslant 2^{-j}}|\check{\phi}_j^a(h)|\,\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}\mathrm{d}h,\\
I_j^2 &:= \int_{2^{-j}<|h|_a\leqslant 1}|\check{\phi}_j^a(h)|\,\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}\mathrm{d}h.
\end{aligned}$$

对于 I_j^0 项，由 (2.27) 和 (2.5)，存在一个常数 $\kappa > 0$ 使得

$$\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)} \lesssim (1+|h|_a^\kappa)\|f\|_{L^p(\rho)},$$

继而

$$\begin{aligned}
I_j^0 &\lesssim \|f\|_{L^p(\rho)}\int_{|h|_a>1}|\check{\phi}_j^a(h)|(1+|h|_a^\kappa)\mathrm{d}h\\
&= \|f\|_{L^p(\rho)}\int_{|h|_a>2^j}|\check{\phi}_0^a(h)|(1+2^{-j\kappa}|h|_a^\kappa)\mathrm{d}h\\
&\leqslant \|f\|_{L^p(\rho)}2^{-j(s+1)}\int_{|h|_a>2^j}|\check{\phi}_0^a(h)|(1+|h|_a^\kappa)|h|_a^{s+1}\mathrm{d}h\\
&\lesssim 2^{-j(s+1)}\|f\|_{L^p(\rho)},
\end{aligned}$$

以及

$$\sum_{j\geqslant 0}2^{sqj}(I_j^0)^q \lesssim \|f\|_{L^p(\rho)}^q.$$

现在来看 I_j^1 项，基于 Hölder 不等式和变量替换，对于 $q' := q/(q-1)$，我们有

$$(I_j^1)^q \leqslant \left(\int_{|h|_a\leqslant 2^{-j}}|\check{\phi}_j^a(h)|^{q'}\mathrm{d}h\right)^{q-1}\int_{|h|_a\leqslant 2^{-j}}\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q\mathrm{d}h$$

$$= 2^{a\cdot mj}\left(\int_{|h|_a\leqslant 1}|\check{\phi}_0^a(h)|^{q'}\mathrm{d}h\right)^{q-1}\int_{|h|_a\leqslant 2^{-j}}\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q\mathrm{d}h.$$

所以由 Fubini 定理可得

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant 0}2^{sqj}(I_j^1)^q &\lesssim \sum_{j\geqslant 0}2^{sqj+a\cdot mj}\int_{|h|_a\leqslant 2^{-j}}\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q\mathrm{d}h\\ &= \int_{|h|_a\leqslant 1}\sum_{j\geqslant 0,|h|_a\leqslant 2^{-j}}2^{sqj+a\cdot mj}\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q\mathrm{d}h\\ &\lesssim \int_{|h|_a\leqslant 1}|h|_a^{-sq-a\cdot m}\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q\mathrm{d}h.\end{aligned}$$

接下来考虑 I_j^2 项. 由基于测度 $\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}$ 的 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}(I_j^2)^q &= 2^{-Mqj}\left(\int_{2^{-j}<|h|_a\leqslant 1}|2^{aj}h|_a^{a\cdot m+M}|\check{\phi}_0^a(2^{aj}h)|\,\frac{\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}}{|h|_a^M}\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}\right)^q\\ &\leqslant 2^{-Mqj}\left(\int_{|h|_a\geqslant 1}(|h|_a^{a\cdot m+M}|\check{\phi}_0^a(h)|)^{q'}\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}\right)^{q-1}\int_{2^{-j}\leqslant|h|_a\leqslant 1}\frac{\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q}{|h|_a^{Mq}}\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}.\end{aligned}$$

我们类似地使用 Fubini 定理得到

$$\begin{aligned}\sum_{j\geqslant 0}2^{sqj}(I_j^2)^q &\lesssim \sum_{j\geqslant 0}2^{(s-M)qj}\int_{2^{-j}\leqslant|h|_a\leqslant 1}\frac{\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q}{|h|_a^{Mq}}\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}\\ &\lesssim \int_{|h|_a\leqslant 1}\frac{\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q}{|h|_a^{sq}}\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}.\end{aligned}$$

注意带对于 $j=-1$，以上所有的估计都是简单的. 因此，综上我们有

$$\sum_{j\geqslant -1}2^{sqj}\|\mathcal{R}_j^{a,M}f\|_{L^p(\rho)}^q \lesssim \int_{|h|_a\leqslant 1}\frac{\|\delta_h^{(M)}f\|_{L^p(\rho)}^q}{|h|_a^{sq}}\frac{\mathrm{d}h}{|h|_a^{a\cdot m}}+\|f\|_{L^p(\rho)}.$$

另外一边，注意到

$$\phi_j^{a,M}(\xi)=\phi_{-1}^{a,M}(2^{-a(j+1)}\xi)-\phi_{-1}^{a,M}(2^{-aj}\xi)$$

以及

$$\phi_{-1}^{a,M}(\xi)=1 \text{ 当 } \xi\in B_{1/(2M)}^a \text{ 和 } \phi_{-1}^{a,M}(\xi)=0 \text{ 当 } \xi\notin B_{2/3}^a,$$

所以我们有

$$\mathrm{supp}\ \phi_j^{a,M}\subset B_{2^{j+1}}^a\setminus B_{(2^j-1)/M}^a.$$

因此，对于任意的 $i,j\geqslant -1$ 满足 $|j-i|>\log_2 M+2=:\gamma$,

$$\mathcal{R}_j^{a,M}\mathcal{R}_i^a f(x)=0.$$

此外，还注意到对于任意的 $\xi \in \mathbb{R}^N$，

$$\sum_{j\geqslant -1}\phi_j^{a,M}(\xi) = (-1)^{M+1}\sum_{k=1}^{M}\sum_{j\geqslant -1}(-1)^{M-k}\binom{M}{k}\phi_j^a(k\xi)$$
$$= (-1)^{M+1}\sum_{k=1}^{M}(-1)^{M-k}\binom{M}{k} = 1,$$

继而

$$\mathcal{R}_i^a f = \sum_{j\geqslant -1}\mathcal{R}_i^a\mathcal{R}_j^{a,M} f = \sum_{|j-i|\leqslant\gamma}\mathcal{R}_i^a\mathcal{R}_j^{a,M} f.$$

因此，由 (2.16)，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{i\geqslant -1}2^{sqi}\|\mathcal{R}_i^a f\|_{L^p(\rho)}^q &\leqslant \sum_{i\geqslant -1}2^{sqi}\sum_{|i-j|\leqslant\gamma}\|\mathcal{R}_i^a\mathcal{R}_j^{a,M} f\|_{L^p(\rho)}^q\\ &\lesssim \sum_{i\geqslant -1}2^{sqi}\sum_{|i-j|\leqslant\gamma}\|\mathcal{R}_j^{a,M} f\|_{L^p(\rho)}^q\\ &\lesssim \sum_{j\geqslant -1}2^{sqj}\|\mathcal{R}_j^{a,M} f\|_{L^p(\rho)}^q \lesssim \|f\|_{\widetilde{\mathbf{B}}_{p,q}^{s,a}(\rho)}.\end{aligned}$$

从而对于 $s>0$ 得到 (2.28) 中的第一个等价关系.

(iii) 我们在这部分中对 $s>0$ 证明 (2.28) 中的第二个等价关系. 对于 $s\in(0,1)$ 和 $|h|_a\leqslant 1$，由 (2.4) 和 (2.5) 我们有

$$\|[\delta_h,\rho]f\|_{L^p}\lesssim\|f\delta_h\rho\|_{L^p}\lesssim|h|\|f\|_{L^p(\rho)}\leqslant|h|_a\|f\|_{L^p(\rho)},$$

从而对于任意的 $s\in(0,1)$,

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)}\asymp\|f\|_{\widetilde{\mathbf{B}}_{p,q}^{s,a}(\rho)}\asymp\|\rho f\|_{\widetilde{\mathbf{B}}_{p,q}^{s,a}}\asymp\|\rho f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}}. \tag{2.37}$$

对于 $s\in[1,2)$，我们有

$$\|[\delta_h^{(2)},\rho]f\|_{L^p}\lesssim\|f\delta_h^{(2)}\rho\|_{L^p}+\|\delta_h\rho\delta_h f\|_{L^p}\lesssim|h|_a^2\|f\rho\|_{L^p}+|h|_a\|\rho\delta_h f\|_{L^p},$$

继而得到 (2.37) 对所有的 $s\in[1,2)$ 成立. 由归纳可得 (2.37) 对所有的 $s>0$ 成立.

(iv) 在最后这部分中，我们证明 (2.29) 对所有的 $s\leqslant 0$ 成立. 对于 $s<0$，由引理 2.1.3 和在第 (iii) 部分得到的关于 $s>0$ 的等价，我们有

$$\|f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}(\rho)}\lesssim\sup_{\varphi\in\mathscr{S}}\frac{|\langle f,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^{-s,a}(\rho^{-1})}}\lesssim\sup_{\varphi\in\mathscr{S}}\frac{|\langle f,\varphi\rangle|}{\|\rho^{-1}\varphi\|_{\mathbf{B}_{p',q'}^{-s,a}}}\lesssim\|\rho f\|_{\mathbf{B}_{p,q}^{s,a}}.$$

对于 $s=0$ 和 $q\in[1,\infty)$，我们有

$$\|f\|^q_{\mathbf{B}^{0,a}_{p,q}(\rho)}=\sum_{j\geqslant -1}\|\mathcal{R}^a_j f\|^q_{L^p(\rho)}\leqslant \sum_{j\geqslant -1}\left(\sum_{k\geqslant -1}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|_{L^p(\rho)}\right)^q\leqslant I_1+I_2,$$

其中

$$I_1:=\sum_{j\geqslant -1}\left(\sum_{k\leqslant j}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|_{L^p(\rho)}\right)^q,$$

$$I_2:=\sum_{j\geqslant -1}\left(\sum_{k> j}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|_{L^p(\rho)}\right)^q.$$

固定 $\alpha\in(0,1)$. 由 Hölder 不等式，我们有

$$\begin{aligned}
I_1&=\sum_{j\geqslant -1}\left(\sum_{k\leqslant j}2^{\alpha k}2^{-\alpha k}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|_{L^p(\rho)}\right)^q\\
&\leqslant \sum_{j\geqslant -1}\left(\sum_{k\leqslant j}2^{\alpha kq/(q-1)}\right)^{q-1}\sum_{k\leqslant j}2^{-\alpha kq}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|^q_{L^p(\rho)}\\
&\lesssim \sum_{j\geqslant -1}2^{\alpha qj}\sum_{k\geqslant -1}2^{-\alpha kq}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|^q_{L^p(\rho)}\\
&=\sum_{k\geqslant -1}2^{-\alpha kq}\sum_{j\geqslant -1}2^{\alpha qj}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|^q_{L^p(\rho)}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\sum_{j\geqslant -1}2^{\alpha qj}\|\mathcal{R}^a_j(\rho^{-1}g)\|^q_{L^p(\rho)}=\|\rho^{-1}g\|^q_{\mathbf{B}^{\alpha,a}_{p,q}(\rho)}\lesssim\|g\|^q_{\mathbf{B}^{\alpha,a}_{p,q}},$$

我们进一步得到

$$I_1\lesssim\sum_{k\geqslant -1}2^{-\alpha kq}\|\mathcal{R}^a_k(\rho f)\|^q_{\mathbf{B}^{\alpha,a}_{p,q}}\lesssim\sum_{k\geqslant -1}\|\mathcal{R}^a_k(\rho f)\|^q_{L^p}=\|\rho f\|^q_{\mathbf{B}^{0,a}_{p,q}}.$$

类似地，

$$I_2\lesssim\sum_{k\geqslant -1}2^{\alpha kq}\|\mathcal{R}^a_k(\rho f))\|^q_{\mathbf{B}^{-\alpha,a}_{p,q}}\lesssim\|\rho f\|^q_{\mathbf{B}^{0,a}_{p,q}}.$$

因此，对于任意的 $q\in[1,\infty)$

$$\|f\|^q_{\mathbf{B}^{0,a}_{p,q}(\rho)}\lesssim\|\rho f\|^q_{\mathbf{B}^{0,a}_{p,q}}.$$

对于 $q=\infty$，计算和结果是一样的.

此外，对于 $s\leqslant 0$，由对偶性质，我们有

$$\|\rho f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}}\lesssim\sup_{\varphi\in\mathscr{S}}\frac{|\langle\rho f,\varphi\rangle|}{\|\varphi\|_{\mathbf{B}^{-s,a}_{p',q'}}}\lesssim\sup_{\varphi\in\mathscr{S}}\frac{|\langle f,\rho\varphi\rangle|}{\|\rho\varphi\|_{\mathbf{B}^{-s,a}_{p',q'}(\rho^{-1})}}\lesssim\|f\|_{\mathbf{B}^{s,a}_{p,q}(\rho)}.$$

证毕. □

2.2 仿积运算

在本节中，我们引入基于 Bony 分解 [11]，在文章 [46] 中定义及发展的拟控制计算中的一些基本知识. 首先，一个重要的结果是：对于两个缓增广义函数 $f\in\mathbf{C}^{\alpha}_a$，$g\in\mathbf{C}^{\beta}_a$，它们的乘积 fg 是良定的当且仅当 $\alpha+\beta>0$. 具体的定义方式由下面的引理给出.

引理 2.2.1 令 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{W}$. 对于任意的 $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\|f\prec g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_1\rho_2)}\lesssim_C \|f\|_{L^\infty(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)},\tag{2.38}$$

且对于任意的 $\alpha<0$ 和 $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\|f\prec g\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta}_a(\rho_1\rho_2)}\lesssim_C \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)}.\tag{2.39}$$

此外，对于任意满足 $\alpha+\beta>0$ 的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$,

$$\|f\circ g\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta}_a(\rho_1\rho_2)}\lesssim_C \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)}.\tag{2.40}$$

特别地，对于任意满足 $\alpha+\beta>0$ 的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $f\in\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)$，$g\in\mathbf{C}^{\beta}(\rho_2)$，在 Bony 分解 (2.14) (亦被称为 Bony 仿积) 的意义下，乘积 fg 是良定的，且

$$\|fg\|_{\mathbf{C}^{\alpha\wedge\beta}_a(\rho_1\rho_2)}\lesssim_C \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)}.\tag{2.41}$$

证明 为了使得 $f\prec g$，$f\succ g$ 和 $f\circ g$ 有意义，实际上只需要证明对应的级数在对应的 Besov 范数下绝对收敛. 这里我们采用 [46, 引理 2.1] 和 [40, 引理 2.14] 中的证明方法. 首先，由 (2.15) 可知

$$\begin{aligned}\|f\prec g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_1\rho_2)}&=\sup_k 2^{\beta k}\left\|\mathcal{R}^a_k\left(\sum_{|j-k|\leqslant 3}S_{j-1}f\mathcal{R}^a_j g\right)\right\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)}\\&\lesssim\sup_k\sum_{|j-k|\leqslant 3}2^{\beta k}\|S_{j-1}f\mathcal{R}^a_j g\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)}\\&\lesssim\sup_k\|S_{k-1}f\|_{L^\infty(\rho_1)}2^{\beta k}\|\mathcal{R}^a_j g\|_{L^\infty(\rho_2)}.\end{aligned}$$

由 (2.18) 和带权各向异性 Besov 空间定义，我们得到 (2.38).

另一方面对于任意的 $\alpha<0$ 和 $f\in\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)$，我们有

$$\begin{aligned}\|f\prec g\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta}_a(\rho_1\rho_2)}&\lesssim\sup_k 2^{\alpha k}\|S_{k-1}f\|_{L^\infty(\rho_1)}2^{\beta k}\|\mathcal{R}^a_k g\|_{L^\infty(\rho_2)}\\&\lesssim\sup_k 2^{\alpha k}\sum_{i\leqslant k-2}\|\mathcal{R}^a_i f\|_{L^\infty(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)}\end{aligned}$$

$$\lesssim \sup_k 2^{\alpha k} \sum_{i\leqslant k-2} 2^{-\alpha i}\|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)}.$$

接下来为了估计 $f\circ g$，我们首先给出下面的观察: 对于任意的 $k\geqslant -1$，

$$\mathcal{R}^a_k\left(\sum_{|j-i|\leqslant 1}\mathcal{R}^a_i f\mathcal{R}^a_j g\right)=0,\quad \text{若 } i<k-2.$$

实际上，对于任意的 $i\geqslant -1$，$\sum_{|j-i|\leqslant 1}\mathcal{R}^a_i f\mathcal{R}^a_j g=\mathcal{R}^a_i f\left(\sum_{j=i-1}^{i+1}\mathcal{R}^a_j g\right)$ 的 Fourier 变换具有在球 $B^a_{2^{j+1}}$ 内的紧支撑. 因此，对于 $\alpha+\beta>0$，我们有

$$\begin{aligned}\|f\circ g\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta}(\rho_1\rho_2)} &\lesssim \sup_k 2^{(\alpha+\beta)k}\sum_{i\geqslant k-2}\|\mathcal{R}^a_i f\|_{L^\infty(\rho_1)}\sum_{j=i-1}^{i+1}\|\mathcal{R}^a_k g\|_{L^\infty(\rho_2)}\\ &\lesssim \sup_k 2^{(\alpha+\beta)k}\sum_{i\geqslant k-2}2^{-(\alpha+\beta)i}\|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)} \lesssim \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)}.\end{aligned}$$

证毕. □

为了建立动理学算子下的拟控制计算，我们下面给出一些交换子估计. 对于任意两个抽象算子 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$，我们用下面的记号作为它们之间的交换子:

$$[\mathscr{A}_1,\mathscr{A}_2]f:=\mathscr{A}_1(\mathscr{A}_2 f)-\mathscr{A}_2(\mathscr{A}_1 f).$$

我们首先给出一个简单的交换子估计 (参见 [46, 引理 2.2])

引理 2.2.2 对于任意的 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{W}$，和 $\alpha\in(0,1)$，存在一个常数 $C=C(\rho_1,\rho_2,\alpha,a,m)>0$ 使得对于所有的 $j\geqslant -1$，

$$\|[\mathcal{R}^a_j,f]g\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)}\lesssim_C 2^{-\alpha j}\|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{L^\infty(\rho_2)}. \tag{2.42}$$

证明 由定义可得

$$[\mathcal{R}^a_j,f]g(x)=\int_{\mathbb{R}^N}\check{\phi}^a_j(x-y)\left(f(y)-f(x)\right)g(y)\mathrm{d}y.$$

由 (2.32) 和 (2.5)，我们有

$$\begin{aligned}\|[\mathcal{R}^a_j,f]g\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} &\lesssim \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{L^\infty(\rho_2)}\sup_x\int_{\mathbb{R}^N}|\check{\phi}^a_j(x-y)||x-y|^\alpha(1+|x-y|)^\kappa\mathrm{d}y\\ &\lesssim 2^{-\alpha j}\|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)}\|g\|_{L^\infty(\rho_2)}\end{aligned}$$

其中 κ 为一个与 ρ_1,ρ_2 相关的常数. 证毕. □

利用上面的交换子估计，我们可以得到下面另一个交换子的结果 (参见 [46, 引理 2.3]).

引理 2.2.3 假设 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{W}$, $\alpha \in (0,1)$ 和 $\beta \in \mathbb{R}$. 令 $f \in \mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)$ 和 $g \in \mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)$. 则对于

$$R_j(f,g) := \mathcal{R}_j^a(f \prec g) - f\mathcal{R}_j^a g,$$

存在常数 $C = C(\rho_1, \rho_2, \alpha, a, m) > 0$ 使得对所有的 $j \geqslant -1$,

$$\|R_j(f,g)\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \lesssim_C 2^{-j(\alpha+\beta)}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.$$

证明 注意到 $f \prec g = \sum_{i\geqslant -1} f \prec \mathcal{R}_j^a g$ 且

$$f \prec \mathcal{R}_i^a g = \sum_k S_{k-1} f \mathcal{R}_i^a \mathcal{R}_k^a g = \sum_{k=i-1}^{i+1} S_{k-1} f \mathcal{R}_k^a(\mathcal{R}_i^a g),$$

继而由 (2.15),

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_j^a(f \prec g) &= \sum_{i=k-1}^{k+1} \sum_{|k-j|\leqslant 3} \mathcal{R}_j^a\left(S_{k-1} f \mathcal{R}_k^a(\mathcal{R}_i^a g)\right) \\
&= \sum_{i=j-4}^{j+4} \sum_k \mathcal{R}_j^a\left(S_{k-1} f \mathcal{R}_k^a(\mathcal{R}_i^a g)\right) = \sum_{i=j-4}^{j+4} \mathcal{R}_j^a(f \prec \mathcal{R}_i^a g) \\
&= \sum_{i=j-4}^{j+4} \mathcal{R}_j^a(f\mathcal{R}_i^a g) - \sum_{i=j-4}^{j+4} \mathcal{R}_j^a(f \succcurlyeq \mathcal{R}_i^a g) \\
&= \sum_{i=j-4}^{j+4} f\mathcal{R}_j^a\mathcal{R}_i^a g + \sum_{i=j-4}^{j+4} [\mathcal{R}_j^a, f]\mathcal{R}_i^a g - \sum_{i=j-4}^{j+4} \mathcal{R}_j^a(f \succcurlyeq \mathcal{R}_i^a g).
\end{aligned}$$

接着由 (2.10) 注意到 $\sum_{i=j-4}^{j+4} \mathcal{R}_j^a \mathcal{R}_i^a g = \mathcal{R}_j^a g$. 因此我们有

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_j^a(f \prec g) - f\mathcal{R}_j^a g\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \\
&\leqslant \sum_{i=j-4}^{j+4} \|[\mathcal{R}_j^a, f]\mathcal{R}_i^a g\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} + \sum_{i=j-4}^{j+4} \|\mathcal{R}_j^a(f \succcurlyeq \mathcal{R}_i^a g)\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)}.
\end{aligned}$$

利用 (2.42) 和 (2.39), (2.40)，我们有

$$\begin{aligned}
\|R_j(f,g)\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \lesssim & 2^{-\alpha j}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|\mathcal{R}_j^a g\|_{L^\infty(\rho_2)} \\
& + 2^{-(\alpha+\beta)j}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)} \sum_{i=j-4}^{j+4} \|\mathcal{R}_j^a g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)} \\
\lesssim & 2^{-(\alpha+\beta)j}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.
\end{aligned}$$

证毕. □

基于上面的交换子估计，我们给出下面关键的延拓结果. 也是 [46, 引理 2.4] 的带权的各向异性的版本.

引理 2.2.4 令 $\rho_1, \rho_2, \rho_3 \in \mathscr{W}$. 假设 $\alpha \in (0,1)$, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha+\beta+\gamma > 0$ 且 $\beta+\gamma < 0$. 则存在一个作用在 $\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1) \times \mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2) \times \mathbf{C}^{\gamma}_a(\rho_3)$ 上的有界三线性算子 com 使得

$$\mathrm{com}(f,g,h) = (f \prec g) \circ h - f(g \circ h), \quad \forall f,g,h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N).$$

这里的有界三线性算子的意思是当固定其他两个函数时关于第三个函数是线性的，且存在一个常数 $C>0$ 使得对于任意的 $(f,g,h) \in \mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1) \times \mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2) \times \mathbf{C}^{\gamma}_a(\rho_3)$,

$$\|\mathrm{com}(f,g,h)\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_a(\rho_1\rho_2\rho_3)} \lesssim_C \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)} \|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)} \|h\|_{\mathbf{C}^{\gamma}_a(\rho_3)}. \tag{2.43}$$

此外，若 $\beta < 0$ 且 $\alpha+\beta > 0$，则 $[h\circ, f]g$ 可以延拓为一个 $\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1) \times \mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2) \times \mathbf{C}^{\gamma}_a(\rho_3)$ 上的有界三线性算子，即存在常数 $C>0$,

$$\|[h\circ, f]g\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_a(\rho_1\rho_2\rho_3)} \lesssim_C \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a(\rho_1)} \|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a(\rho_2)} \|h\|_{\mathbf{C}^{\gamma}_a(\rho_3)}. \tag{2.44}$$

证明 对于任意的 $f,g,h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$，注意到

$$\mathrm{com}(f,g,h) = \sum_{j,k\geqslant -1} \sum_{|i-j|\leqslant 1} \left(\mathcal{R}^a_i(\mathcal{R}^a_k f \prec g)\mathcal{R}^a_j h - \mathcal{R}^a_k f \mathcal{R}^a_i g \mathcal{R}^a_j h \right).$$

基于 (2.15) 和 (2.10),

$$\begin{aligned} \mathcal{R}^a_i(\mathcal{R}^a_k f \prec g) &= \sum_{|\ell-i|\leqslant 3} \mathbb{1}_{k\leqslant \ell+1} \mathcal{R}^a_i(S_{\ell-1}(\mathcal{R}^a_k f) \prec \mathcal{R}^a_\ell g) \\ &= \mathbb{1}_{k\leqslant i+4} \mathcal{R}^a_i(\mathcal{R}^a_k f \prec g). \end{aligned}$$

这时，我们有

$$\begin{aligned} \mathrm{com}(f,g,h) &= \sum_{j,k\geqslant -1} \sum_{|i-j|\leqslant 1} \left(\mathbb{1}_{i\geqslant k-4} \mathcal{R}^a_i(\mathcal{R}^a_k f \prec g)\mathcal{R}^a_j h - \mathcal{R}^a_k f \mathcal{R}^a_i g \mathcal{R}^a_j h \right) \\ &= \sum_{j,k\geqslant -1} \sum_{|i-j|\leqslant 1} \Big(\mathbb{1}_{i\geqslant k-4} R_i(\mathcal{R}^a_k f, g)\mathcal{R}^a_j h \\ &\qquad + \mathbb{1}_{i\geqslant k-4} \mathcal{R}^a_k f \mathcal{R}^a_i g \mathcal{R}^a_j h - \mathcal{R}^a_k f \mathcal{R}^a_i g \mathcal{R}^a_j h \Big) \\ &= \sum_{j,k\geqslant -1} \sum_{|i-j|\leqslant 1} \Big(\mathbb{1}_{i\geqslant k-4} R_i(\mathcal{R}^a_k f, g)\mathcal{R}^a_j h - \mathbb{1}_{i<k-4} \mathcal{R}^a_k f \mathcal{R}^a_i g \mathcal{R}^a_j h \Big), \end{aligned} \tag{2.45}$$

其中 $R_i(\cdot,\cdot)$ 的定义见引理 2.2.3. 我们接下来分别计算上式右侧的两部分. 对于第一部分，观察到对于任意的 $j\geqslant -1$,

$$\sum_{k\geqslant -1}\sum_{i:|i-j|\leqslant 1}\mathbb{1}_{i\geqslant k-4}R_i(\mathcal{R}^a_k f,g)\mathcal{R}^a_j h=\sum_{i=j-1}^{j+1}\sum_{k\leqslant i+4}(\mathcal{R}^a_i(\mathcal{R}^a_k f\prec g)-\mathcal{R}^a_k f\mathcal{R}^a_i g)\mathcal{R}^a_j h.$$

故而该函数的 Fourier 变换的支撑在球 $B^a_{2^{j+5}}$ 内. 基于引理 2.2.3，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j,k\geqslant -1}\sum_{i:|i-j|\leqslant 1}\mathbb{1}_{i\geqslant k-4}R_i(\mathcal{R}^a_k f,g)\mathcal{R}^a_j h\Big\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_a(\rho_1\rho_2\rho_3)}\\
&=\sup_{\ell\geqslant -1}2^{(\alpha+\beta+\gamma)\ell}\Big\|\mathcal{R}_\ell\Big(\sum_{j\geqslant \ell-5}\sum_{i:|i-j|\leqslant 1}R_i(\sum_{k\leqslant i+4}\mathcal{R}^a_k f,g)\mathcal{R}^a_j h\Big)\Big\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2\rho_3)}\\
&\lesssim \sup_{\ell\geqslant -1}2^{(\alpha+\beta+\gamma)\ell}\sum_{j\geqslant \ell-5}\sum_{i:|i-j|\leqslant 1}2^{-i(\alpha+\beta)}\Big\|\sum_{k\leqslant i+4}\mathcal{R}^a_k f\Big\|_{\mathbf{C}^\alpha_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_2)}2^{-\gamma j}\|h\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_3)}.
\end{aligned}$$

注意到 $\alpha+\beta+\gamma>0$，我们有

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j,k\geqslant -1}\sum_{|i-j|\leqslant 1}\mathbb{1}_{i\geqslant k-4}R_i(\mathcal{R}^a_k f,g)\mathcal{R}^a_j h\Big\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_a(\rho_1\rho_2\rho_3)}\\
&\lesssim \sup_{\ell\geqslant -1}2^{(\alpha+\beta+\gamma)\ell}\sum_{j\geqslant \ell-5}2^{-j(\alpha+\beta+\gamma)}\|f\|_{\mathbf{C}^\alpha_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_2)}\|h\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_3)}\\
&\lesssim \|f\|_{\mathbf{C}^\alpha_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_2)}\|h\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_3)}.
\end{aligned}$$

现在我们来看 (2.45) 的第二项. 我们还是可以观察到对于任意的 $k\geqslant -1$,

$$\sum_{j\geqslant -1}\sum_{i:|i-j|\leqslant 1}\mathbb{1}_{i\leqslant k-4}\mathcal{R}^a_k f\mathcal{R}^a_i g\mathcal{R}^a_j h=\sum_{i=-1}^{k-4}\sum_{j:|i-j|\leqslant 1}\mathcal{R}^a_k f\mathcal{R}^a_i g\mathcal{R}^a_j h$$

的 Fourier 变换具有 $B^a_{2^k}$ 内的紧支撑. 因此，对于 $\beta+\gamma<0$ 和 $\alpha+\beta+\gamma>0$

$$\begin{aligned}
&\Big\|\sum_{j,k\geqslant -1}\sum_{i:|i-j|\leqslant 1}\mathbb{1}_{i\leqslant k-4}\mathcal{R}^a_k f\mathcal{R}^a_i g\mathcal{R}^a_j h\Big\|_{\mathbf{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_a(\rho_1\rho_2\rho_3)}\\
&=\sup_{\ell\geqslant -1}2^{(\alpha+\beta+\gamma)\ell}\|\mathcal{R}^a_\ell\Big(\sum_{k\geqslant \ell-2}\sum_{j\geqslant -1}\sum_{i:|i-j|\leqslant 1}\mathbb{1}_{i\leqslant k-4}\mathcal{R}^a_k f\mathcal{R}^a_i g\mathcal{R}^a_j h\Big)\Big\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2\rho_3)}\\
&\leqslant \sup_{\ell\geqslant -1}2^{(\alpha+\beta+\gamma)\ell}\sum_{k\geqslant \ell-2}\sum_{i=-1}^{k-4}\sum_{j=i-1}^{i+1}2^{-\alpha k}2^{-\beta i}2^{-\gamma j}\|f\|_{\mathbf{C}^\alpha_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_2)}\|h\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_3)}\\
&\lesssim \sup_{\ell\geqslant -1}2^{(\alpha+\beta+\gamma)\ell}\sum_{k\geqslant \ell-2}2^{-\alpha k}\sum_{i=-1}^{k-4}2^{-(\beta+\gamma)i}\|f\|_{\mathbf{C}^\alpha_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_2)}\|h\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_3)}\\
&\lesssim \|f\|_{\mathbf{C}^\alpha_a(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_2)}\|h\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_3)}.
\end{aligned}$$

到此我们得到了算子 com 对于 $f, g, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 的有界性 (2.43).

现在我们可以立刻把 com 延拓为 $(\mathscr{S}(\mathbb{R}^N))^3$ 关于 $\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1) \times \mathbf{C}_a^\beta(\rho_2) \times \mathbf{C}_a^\gamma(\rho_3)$ 空间范数的完备化空间上. 遗憾的是这个空间是 $\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1) \times \mathbf{C}_a^\beta(\rho_2) \times \mathbf{C}_a^\gamma(\rho_3)$ 空间的严格子空间，因为 $\mathbf{C}_a^\theta(\rho)$ 并不能被 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^N)$ 中的函数列在 $\|\cdot\|_{\mathbf{C}_a^\theta(\rho)}$ 下逼近. 实际上我们只有

$$\|f - f_n\|_{\mathbf{C}_a^{\theta-\varepsilon}(\rho)} \lesssim n^{-\varepsilon} \|f\|_{\mathbf{C}_a^\theta(\rho)}, \quad \forall \varepsilon > 0,$$

其中 f_n 为 f 与经典磨光子的卷积 (更一般的情况下, C_b^∞ 函数在 Hölder 范数 $\|\cdot\|_{\mathbf{C}^\alpha}$ 下的完备化空间被称为 little Hölder 空间. Little Hölder 空间和原 Hölder 空间等价，当且仅当 $\alpha \in \mathbb{N}_0$，参考 [117]). 因此我们这里只能对任意的 $\alpha' < \alpha$,$\beta' < \beta$, $\gamma' < \gamma$ 满足 $\alpha' \in (0,1)$ $\alpha' + \beta' + \gamma' > 0$ 和 $\beta' + \gamma' < 0$，先将 com 延拓为 $\mathbf{C}_a^{\alpha'}(\rho_1) \times \mathbf{C}_a^{\beta'}(\rho_2) \times \mathbf{C}_a^{\gamma'}(\rho_3)$ 上的有界三线性算子. 注意到当 $\theta > 0$ 时，由 (2.30)和下面的观察

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\theta} \leqslant \lim_{\theta' \to \theta} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^{\theta'}} \leqslant \limsup_{\theta' \to \theta} \|f\|_{\mathbf{C}^{\theta'}},$$

我们有

$$\|\mathrm{com}(f, g, h)\|_{\mathbf{C}_a^{\alpha+\beta+\gamma}(\rho_1\rho_3\rho_3)} = \limsup_{\alpha'\uparrow\alpha, \beta'\uparrow\beta, \gamma'\uparrow\gamma} \|\mathrm{com}(f, g, h)\|_{\mathbf{C}_a^{\alpha'+\beta'+\gamma'}(\rho_1\rho_3\rho_3)}.$$

实际上我们关于 (2.43) 的常数 C 是关于 $\alpha'\beta', \gamma'$ 一致的，因此，

$$\begin{aligned}\|\mathrm{com}(f, g, h)\|_{\mathbf{C}_a^{\alpha+\beta+\gamma}(\rho_1\rho_3\rho_3)} &\lesssim \limsup_{\alpha'\uparrow\alpha, \beta'\uparrow\beta, \gamma'\uparrow\gamma} \|f\|_{\mathbf{C}_a^{\alpha'}(\rho_1)} \|g\|_{\mathbf{C}_a^{\beta'}(\rho_2)} \|h\|_{\mathbf{C}_a^{\gamma'}(\rho_3)} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)} \|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)} \|h\|_{\mathbf{C}_a^\gamma(\rho_3)},\end{aligned}$$

其中最后一步来自于 Fatou 引理 (参见 [3, 定理 2.72]).

现在我们来证明 (2.44). 首先注意到

$$[h\circ, f]g = h \circ (gf) - f(h \circ g) = h \circ (f \succcurlyeq g) + \mathrm{com}(f, g, h).$$

由引理 2.2.1，我们有

$$\begin{aligned}\|h \circ (f \succcurlyeq g)\|_{\mathbf{C}_a^{\alpha+\beta+\gamma}(\rho_1\rho_2\rho_3)} &\lesssim \|h\|_{\mathbf{C}_a^\gamma(\rho_3)} \|f \succcurlyeq g\|_{\mathbf{C}_a^{\alpha+\beta}(\rho_1\rho_2)} \\ &\lesssim \|h\|_{\mathbf{C}_a^\gamma(\rho_3)} \|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)} \|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.\end{aligned}$$

这时再利用 (2.43)，我们得到 (2.44). 到此引理得证. □

第三章　动理学算子半群和交换子估计

在本章，我们介绍有关动理学算子半群的基本估计. 相比于经典的热半群，由于传输项 $v\cdot\nabla_x$ 的出现，动理学算子的半群与分块算子 $\mathcal{R}_j^a$ 不可交换 (见下面的 (3.14))，这种不可交换会带来新的问题与关于拟控制计算中交换子的新的形式 (见引理 3.4.1). 在第 3.1 节中，我们会给出关于动理学算子半群都最优正则性估计. 在第 3.2 节中，我们将介绍动理学 Hölder 空间. 我们通过引入以速度 v 匀速运动的时间推移算子 $x\to x+tv$，将经典的 Hölder 空间变为与动理学算子更加相容的动理学 Hölder 空间. 同时，基于 [114] 的方法，我们也给出了关于带权空间的一个局部的等价刻画. 这个刻画会帮助我们得到线性方程 (1.14) 的适定性. 在第 3.3 节中，我们会在动理学 Hölder 空间中建立动理学算子的 Schauder 估计. 在第 3.4 节中，我们将证明有关动理学算子半群的交换子估计. 由 (1.20)可知，该估计是建立拟控制解定义的关键.

在本篇学位论文的余下内容中，我们固定第 2.1.1 小节内的参数

$$N=2d,\ d\in\mathbb{N},\quad n=2,\quad m_1=m_2=d,\quad a=(3,1).$$

对于所有的 $t>0$，令 P_t 为如下的动理学算子半群

$$P_tf(z):=\Gamma_tp_t*\Gamma_tf(z)=\Gamma_t(p_t*f)(z),\quad z=(x,v)\in\mathbb{R}^{2d},\tag{3.1}$$

其中对于任意 $t\in\mathbb{R}$,

$$\Gamma_tf(z):=f(\Gamma_tz),\quad \Gamma_tz:=(x+tv,v),$$

和

$$p_t(z)=p_t(x,v)=\left(\frac{4\pi t^4}{3}\right)^{-d/2}\exp\left(-\frac{3|x|^2+|3x-2tv|^2}{4t^3}\right).\tag{3.2}$$

注意到 p_t 是下面过程在时刻 $t>0$ 的关于 Lebesgue 测度的分布密度

$$Z_t:=(X_t,V_t)=\left(\sqrt{2}\int_0^tB_s\mathrm{d}s,\sqrt{2}B_t\right),$$

其中 $(B_t)_{t\geqslant0}$ 是一个标准的 d 维布朗运动. 我们上面考虑各向异性参数 $a=(3,1)$ 的原因是下面的尺度变换成立

$$(X_{\lambda t},V_{\lambda t})\overset{(d)}{=}(\lambda^{\frac{3}{2}}X_t,\lambda^{\frac12}V_t),\quad \lambda>0.$$

我们给出下面的观察方便以后使用

$$\Gamma_t\Gamma_s = \Gamma_{t+s}, \quad p_t(z) = t^{-a\cdot m/2}p_1(t^{-a/2}z), \tag{3.3}$$

且对于任意的 $\varphi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$,

$$\partial_t P_t\varphi = (\Delta_v + v\cdot\nabla_x)P_t\varphi.$$

接下来我们我们给出各向异性多项式权的定义.

定义 3.0.1 令 $\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 是由形如下面的多项式函数组成的空间:

$$\rho(z) = \varrho(z)^\kappa, \quad \kappa\in\mathbb{R}, \tag{3.4}$$

其中对于 $z=(x,v)$,

$$\varrho(x,v) := ((1+|x|^2)^{1/3} + 1 + |v|^2)^{-1/2} \asymp (1+|z|_a)^{-1}. \tag{3.5}$$

显然存在一个常数 $C_0 = C_0(\kappa,d) > 0$ 使得

$$\rho(z) \leqslant C_0\rho(\bar{z})(1+|z-\bar{z}|_a^{|\kappa|}), \tag{3.6}$$

且对于任意的 $j\in\mathbb{N}$ 存在常数 $C_j = C_j(\kappa,d) > 0$ 使得

$$|\nabla_v^j\rho(z)| \leqslant C_j\rho(z)\varrho^j(z), \quad |\nabla_x^j\rho(z)| \leqslant C_j\rho(z)\varrho^{2j}(z), \tag{3.7}$$

且对于任意的 $T>0$，存在一个常数 $C_T = C_T(\kappa,d) > 0$ 使得

$$C_T^{-1}\rho(z) \leqslant \Gamma_t\rho(z) \leqslant C_T\rho(z), \quad z\in\mathbb{R}^{2d},\ t\in[0,T]. \tag{3.8}$$

此外，对于任意的 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$,

$$\rho_1/\rho_2,\ \rho_1\rho_2,\ \rho_1\vee\rho_2,\ \rho_1\wedge\rho_2 \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}.$$

特别地，若 $\rho\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 则 $\rho^{-1} = 1/\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$. 由上述分析可知 $\mathscr{P}_{\mathrm{w}} \subset \mathscr{W}$. 且 $\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 关于 ρ^{-1} 封闭，继而引理 2.1.3 和定理 2.1.2 都是适用的.

3.1 动理学算子半群的正则性估计

在本节中，我们会建立有关动理学算子半群的基本估计. 为此，我们首先介绍有关算子半群密度 p_t 在分块算子 $\mathcal{R}_j^a$ 作用下的估计，再得到一个核心的分解公式 (3.14).

引理 3.1.1 对于任意的 $\alpha,\beta,\gamma\geqslant 0$ 和 $T>0$，存在一个常数 $C=C(T,d,\alpha,\beta,\gamma)>0$ 使得对于任意的 $j\geqslant -1$ 和 $t\in(0,T]$，

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x|^{\beta}|v|^{\gamma}|\mathcal{R}^a_j\Gamma_t p_t(x,v)|\mathrm{d}x\mathrm{d}v \lesssim_C 2^{-(3\beta+\gamma)j}((t^{1/2}2^j)^{-\alpha}\wedge 1). \tag{3.9}$$

特别地，对于任意的 $\rho\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}, T>0$ 和 $\alpha\geqslant 0$，存在一个常数 $C=C(T,d,\alpha,\rho)>0$ 使得对于所有的 $j\geqslant -1$ 和 $t\in(0,T]$，

$$\|\mathcal{R}^a_j\Gamma_t p_t\|_{L^1(\rho)}\lesssim_C (t^{1/2}2^j)^{-\alpha}\wedge 1. \tag{3.10}$$

证明 令 $\hbar:=t^{-\frac{1}{2}}2^{-j}$,，我们首先对所有的 $j\geqslant 0$ 和 $n\in\mathbb{N}_0$ 得到下面的估计

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_j(t)&:=\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x|^{\beta}|v|^{\gamma}|\mathcal{R}^a_j\Gamma_t p_t(x,v)|\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\&\lesssim_C 2^{-(3\beta+\gamma)j}\Big(\hbar^{3n}+\hbar^{n}\Big)\Big(1+\hbar^{-(3\beta+\gamma)}\Big),\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中 $C=C(d,n,\beta,\gamma)>0$. 我们注意到

$$\begin{aligned}\mathscr{I}_j(t)&=2^{-(3(d+\beta)+d+\gamma)j}\\&\quad\times\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x|^{\beta}|v|^{\gamma}\left|\int_{\mathbb{R}^{2d}}\check{\phi}^a_0(x-\bar{x},v-\bar{v})p_t(2^{-3j}\bar{x}+t2^{-j}\bar{v},2^{-j}\bar{v})\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{v}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\&=:2^{-(3(d+\beta)+d+\gamma)j}\mathscr{U}_j(t).\end{aligned}$$

由 p_t 的尺度性质 (3.3)，我们有

$$\mathscr{U}=\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x|^{\beta}|v|^{\gamma}\left|\int_{\mathbb{R}^{2d}}\check{\phi}^a_0(x-\bar{x},v-\bar{v})p_1(\hbar^3\bar{x}+\hbar\bar{v},\hbar\bar{v})\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{v}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}v.$$

因为函数 ϕ^a_0 是一个圆环内的紧支撑函数光滑，所以我们对其定义如下的 laplace 算子的逆算子

$$(\widehat{\Delta^{-n}_{x,v}\check{\phi}^a_0})(\xi,\eta):=(|\xi|^2+|\eta|^2)^{-n}\phi^a_0(\xi,\eta)\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d}),$$

其中 $\Delta^{-n}_{x,\mathrm{v}}\check{\phi}^a_0$ 是良定的 Schwartz 函数. 因此，我们有下面的估计

$$\begin{aligned}\mathscr{U}&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x|^{\beta}|v|^{\gamma}\left|\int_{\mathbb{R}^{2d}}\Delta^{-n}_{\bar{x},\bar{v}}\check{\phi}^a_0(x-\bar{x},v-\bar{v})\Delta^n_{x,v}p_1(\hbar^3\bar{x}+\hbar\bar{v},\hbar\bar{v})\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{v}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}v\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^{2d}}|x|^{\beta}|v|^{\gamma}|\Delta^{-n}_{x,v}\check{\phi}^a_0(x,v)|\mathrm{d}x\mathrm{dv}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\Delta^n_{\bar{x},\bar{v}}p_1(\hbar^3\bar{x}+\hbar\bar{v},\hbar\bar{v})|\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{v}\\&\quad+\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\Delta^{-n}_{x,v}\check{\phi}^a_0(x,v)|\mathrm{d}x\mathrm{d}v\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\bar{x}|^{\beta}|\bar{v}|^{\gamma}|\Delta^n_{\bar{x},\bar{v}}p_1(\hbar^3\bar{x}+\hbar\bar{v},\hbar\bar{v})|\mathrm{d}\bar{x}\mathrm{d}\bar{v}.\end{aligned}$$

由求导链式法则,

$$\nabla_{\bar{x}}^n \nabla_{\bar{v}}^m p_1(\hbar^3 \bar{x}+\hbar \bar{v}, \hbar \bar{v})=\hbar^{3n+m}(\nabla_x^n \nabla_v^m p_1+\nabla_x^{n+m} p_1)(\hbar^3 \bar{x}+\hbar \bar{v}, \hbar \bar{v}), \quad \forall m, n \in \mathbb{N},$$

进而基于基础而繁琐的计算和变量替换我们可以得到对于任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\Delta_{\bar{x},\bar{v}}^n p_1(\hbar^3 x+\hbar v, \hbar v)| \mathrm{d}x \mathrm{d}v \lesssim \hbar^{3(n-d)-d}+\hbar^{n-4d}.$$

和

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |x|^\beta |v|^\gamma |\Delta_{\bar{x},\bar{v}}^n p_1(\hbar^3 x+\hbar v, \hbar v)| \mathrm{d}x \mathrm{d}v \lesssim \Big(\hbar^{3(n-d)-d}+\hbar^{n-4d}\Big) \hbar^{-3\beta-\gamma}.$$

因此，对于任意的 $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathscr{U} \lesssim \Big(\hbar^{3(n-d)-d}+\hbar^{n-4d}\Big)\Big(1+\hbar^{-3\beta-\gamma}\Big),$$

继而我们可以得到 (3.11). 因为 $n \in \mathbb{N}$ 是任意的，我们显然有对于任意的 $\alpha \geqslant 0$

$$\mathscr{I}_j(t) \lesssim_C 2^{-(3\beta+\gamma)j} \hbar^\alpha=2^{-(3\beta+\gamma)j}(t^{1/2} 2^j)^{-\alpha}.$$

当 $j=-1$ 时,

$$\mathscr{I}_{-1}(t) \leqslant C \leqslant C T^{\alpha/2} t^{-\alpha/2}.$$

继而通过 $\alpha \geqslant 0$ 的任意性我们得到了 (3.9). 且 (3.10) 是 (3.9)的直接推论. 证毕.□

接下来我们给出下面重要的观察.

引理 3.1.2 给定 $t \geqslant 0$ 和 $j \in \mathbb{N}_0$，定义

$$\Theta_j^t:=\Big\{\ell \geqslant -1: 2^\ell \leqslant 2^4(2^j+t 2^{3j}),\ 2^j \leqslant 2^4(2^\ell+t 2^{3\ell})\Big\}.$$

(i) 对于任意的 $\ell \in \Theta_j^t$，我们有

$$\mathcal{R}_j^a \Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a=0. \tag{3.12}$$

(ii) 对于任意的 $0 \neq \beta \in \mathbb{R}$，存在一个常数 $C=C(\beta)>0$ 使得

$$\sum_{\ell \in \Theta_j^t} 2^{\beta \ell} \lesssim_C 2^{j\beta}\big(1+t 2^{2j}\big)^{|\beta|}, \quad j \in \mathbb{N}_0,\ t \geqslant 0. \tag{3.13}$$

证明 (i) 由 Fourier 变换的 Parsavel 恒等式，我们有

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{R}_j^a f, \Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a g\rangle &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \widehat{\mathcal{R}_j^a f}(\xi_1,\xi_2)\widehat{\Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a g}(\xi_1,\xi_2)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \phi_j^a(\xi_1,\xi_2) f(\xi_1,\xi_2)\phi_\ell^a(\xi_1,\xi_2-t\xi_1)g(\xi_1,\xi_2-t\xi_1)\mathrm{d}\xi_1\mathrm{d}\xi_2.\end{aligned}$$

注意到

$$\mathrm{supp}\phi_j^a \subset \{\xi : 2^{j-1} \leqslant |\xi|_a \leqslant 2^{j+1}\}.$$

固定 $j \in \mathbb{N}$ 和 $t > 0$，易知 $\langle \mathcal{R}_j^a f, \Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a g\rangle = 0$ 当且仅当

$$\{\xi : 2^{j-1} \leqslant |\xi|_a \leqslant 2^{j+1}\} \cap \{\xi = (\xi_1,\xi_2) : 2^{\ell-1} \leqslant |(\xi_1, \xi_2 - t\xi_1)|_a \leqslant 2^{\ell+1}\} = \emptyset,$$

这与 $\ell \notin \Theta_j^t$ 是等价的.

(ii) 固定 $\beta > 0$. 注意到对于任意的 $\ell \in \Theta_j^t$ 且 $\ell \leqslant j$，

$$2^{-\ell} \leqslant 2^{\alpha+2}2^{-j}(1 + t2^{\ell\alpha}) \leqslant 2^{\alpha+2}2^{-j}(1 + t2^{j\alpha}) =: D \Rightarrow \ell \geqslant -\ln D/\ln 2.$$

因此，

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\Theta_j^t} 2^{-\ell\beta} &= \sum_{\ell\in\Theta_j^t;\ell\geqslant j} 2^{-\ell\beta} + \sum_{\ell\in\Theta_j^t;\ell<j} 2^{-\ell\beta} \leqslant \sum_{\ell\geqslant j} 2^{-\ell\beta} + \sum_{-\ln D/\ln 2\leqslant \ell} 2^{-\ell\beta} \\ &\leqslant \frac{2^{-j\beta}}{1-2^{-\beta}} + \frac{D^\beta}{1-2^{-\beta}} \lesssim 2^{-j\beta}(1+t2^{j\alpha})^\beta.\end{aligned}$$

类似地，对于 $D := 2^{\alpha+2}2^j(1 + t2^{j\alpha})$，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{\ell\in\Theta_j^t} 2^{\ell\beta} &= \sum_{\ell\in\Theta_j^t;\ell\geqslant j} 2^{\ell\beta} + \sum_{\ell\in\Theta_j^t;\ell<j} 2^{\ell\beta} \leqslant \sum_{\ell\leqslant \ln D/\ln 2} 2^{\ell\beta} + \sum_{\ell<j} 2^{\ell\beta} \\ &\lesssim D^\beta + 2^{j\beta} \lesssim 2^{j\beta}(1+t2^{j\alpha})^\beta.\end{aligned}$$

证毕. □

注 3.1.1 由 (3.1)，我们有

$$\mathcal{R}_j^a P_t f = (\Gamma_t p_t) * (\mathcal{R}_j^a \Gamma_t f) = \sum_{\ell\geqslant -1} (\Gamma_t p_t) * (\mathcal{R}_j^a \Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a f).$$

利用 (3.12)，我们可以得到下面的关于动理学算子半群的分解公式:

$$\mathcal{R}_j^a P_t f = \sum_{\ell\in\Theta_j^t} (\Gamma_t p_t) * (\mathcal{R}_j^a \Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a f) = \sum_{\ell\in\Theta_j^t} \mathcal{R}_j^a P_t \mathcal{R}_\ell^a f,\ j \in \mathbb{N}_0. \tag{3.14}$$

借由 (3.14)，我们可以下面的引理来刻画动理学算子半群 P_t 的正则性.

引理 3.1.3 (i) 对于任意的 $\rho \in \mathscr{P}_{\rm w}$, $\alpha \geqslant 0$, $\beta \in \mathbb{R}$ 和 $T > 0$, 存在一个常数 $C = C(\rho, T, d, \alpha, \beta) > 0$ 使得对于所有的 $j \geqslant -1$，$t \in (0, T]$ 和 $f \in \mathbf{C}_a^\beta(\rho)$,

$$\|\mathcal{R}_j^a P_t f\|_{L^\infty(\rho)} \lesssim_C 2^{-j\beta}(1 \wedge (t^{\frac{1}{2}} 2^j)^{-\alpha}) \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)}. \tag{3.15}$$

特别地，对于任意的 $\alpha \geqslant 0$,

$$\|P_t f\|_{\mathbf{C}_a^{\alpha+\beta}(\rho)} \lesssim_C t^{-\alpha/2} \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)}. \tag{3.16}$$

(ii) 对于任意的 $\rho \in \mathscr{P}_{\rm w}$，$k \in \mathbb{N}_0$，$\beta < k$ 和 $T > 0$，存在一个常数 $C = C(T, k, \rho, \beta) > 0$ 使得对于所有的 $t \in (0, T]$ 和 $f \in \mathbf{C}_a^\beta(\rho)$,

$$\|\nabla_v^k P_t f\|_{L^\infty(\rho)} \lesssim_C t^{(\beta-k)/2} \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)}. \tag{3.17}$$

(iii) 对于任意的 $\rho \in \mathscr{P}_{\rm w}, T > 0$ 和 $\beta \in (0, 2)$, 存在一个常数 $C = C(\rho, d, \beta, T) > 0$ 使得对于所有的 $t \in [0, T]$ 和 $f \in \mathbf{C}_a^\beta(\rho)$,

$$\|P_t f - \Gamma_t f\|_{L^\infty(\rho)} \lesssim_C t^{\beta/2} \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)}. \tag{3.18}$$

证明 (i) 由插值引理 2.1.2, 我们只需要对于 $\beta \neq 0$ 证明 (3.15). 令 $\rho \in \mathscr{P}_{\rm w}$. 对于任意的 $j \in \mathbb{N}_0$，由 (3.14)，(3.6)，和 (2.6)，我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}_j^a P_t f\|_{L^\infty(\rho)} &\leqslant \sum_{\ell \in \Theta_j^t} \|\mathcal{R}_j^a \Gamma_t p_t * \Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a f\|_{L^\infty(\rho)} \\
&\lesssim \|(1 + |\cdot|_a^{|\kappa|}) \mathcal{R}_j^a \Gamma_t p_t\|_{L^1} \sum_{\ell \in \Theta_j^t} \|\Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a f\|_{L^\infty(\rho)}.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

同时，基于 (3.8)，我们有

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell \in \Theta_j^t} \|\Gamma_t \mathcal{R}_\ell^a f\|_{L^\infty(\rho)} &\lesssim \sum_{\ell \in \Theta_j^t} \|\Gamma_t (\rho \mathcal{R}_\ell^a f)\|_{L^\infty} = \sum_{\ell \in \Theta_j^t} \|\rho \mathcal{R}_\ell^a f\|_{L^\infty} \\
&\leqslant \sum_{\ell \in \Theta_j^t} 2^{-\ell\beta} \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)} \overset{(3.13)}{\lesssim} 2^{-\beta j}(1 + (t4^j)^{|\beta|}) \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)}.
\end{aligned}$$

因此，联立 (3.10) 和 (3.19)，对任意的 $\ell \geqslant 0$ 有

$$\|\mathcal{R}_j^a P_t f\|_{L^\infty(\rho)} \lesssim ((t^{1/2} 2^j)^{-2l} \wedge 1) 2^{-\beta j}(1 + (t4^j)^{|\beta|}) \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)},$$

进而通过取 $\ell = \alpha/2 + |\beta|$ 和 $\ell = \alpha/2$ 得到 (3.15). 对于 $j = -1$，(3.15) 是显然的. 此外，(3.16) 由 (3.15) 直接得到.

(ii) 对于 (3.17)，由引理 2.1.1，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\nabla_v^k P_t f\|_{L^\infty(\rho)} &\leqslant \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{kj}\|\mathcal{R}_j^a P_t f\|_{L^\infty(\rho)} \leqslant \sum_{j=-1}^{\infty} 2^{(k-\beta)j}(1\wedge(t^{\frac{1}{2}}2^j)^{-2k})\|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)} \\
&\lesssim \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)}\int_{-\infty}^{\infty} 2^{(k-\beta)s}(1\wedge(t^{\frac{1}{2}}2^s)^{-2k})\mathrm{d}s \\
&= \|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)} t^{(\beta-k)/2}\int_0^\infty s^{k-\beta}(1\wedge s^{-2k})\frac{\ln 2\mathrm{d}s}{s},
\end{aligned}
$$

继而得到 (3.17).

(iii) 注意到

$$
P_t f - \Gamma_t f \overset{(3.1)}{=} \Gamma_t(p_t * f - f),
$$

以及 $p_t(z) = p_t(-z)$，我们有

$$
p_t * f(z) - f(z) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2d}} p_t(\bar{z})(\delta_{\bar{z}} f(z) + \delta_{-\bar{z}} f(z))\mathrm{d}\bar{z}.
$$

联立 (3.8)，(2.32) 和 (3.6)，可得

$$
\begin{aligned}
\|P_t f - \Gamma_t f\|_{L^\infty(\rho)} \lesssim \|p_t * f - f\|_{L^\infty(\rho)} &\leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2d}} p_t(\bar{z})\|\delta_{\bar{z}} f + \delta_{-\bar{z}} f\|_{L^\infty(\rho)}\mathrm{d}\bar{z} \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} p_t(\bar{z})|\bar{z}|_a^\beta(1+|\bar{z}|_a^\kappa)\mathrm{d}\bar{z}\right)\|f\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho)},
\end{aligned}
$$

其中我们用到了对于 $\beta \in [1,2)$

$$
\delta_{\bar{z}} f + \delta_{-\bar{z}} f = \delta_{\bar{z}}^{(2)} f(\cdot - \bar{z}).
$$

因此，我们可由 (3.3) 得到 (3.18). 证毕. □

3.2 动理学 Hölder 空间

在本节，我们会首先给出带权的动理学 Hölder 空间的定义，它和经典的时间方向的 Hölder 空间不同. 接着我们会给出关于带权的动理学 Hölder 空间的紧嵌入定理和局部阶段的等价刻画. 利用该局部刻画，我们可以通过研究局部系数无权重的 PDE 来得到系数带有权重的 PDE 的结果. 详细的分析见第 五 章. 最后我们在动理学 Hölder 空间的框架下给出一个有关 ∇_v 的估计.

对于任意的 $T>0$，$\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $\rho\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，令 $\mathbb{C}_{T,a}^\alpha(\rho)$ 为包含所有满足下面范数有界的分布 $f:[0,T]\to\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d})$，

$$
\|f\|_{\mathbb{C}_{T,a}^\alpha(\rho)} := \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho)} < \infty.
$$

为了刻画时间方向的正则性，我们紧接着介绍下面的动理学 Hölder 空间.

定义 3.2.1 (**动理学 Hölder 空间**) 令 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，$\alpha \in (0,2)$ 和 $T>0$. 定义

$$\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(\rho) := \Big\{ f : \|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(\rho)} := \|f\|_{\mathbb{C}^{\alpha}_{T,a}(\rho)} + \|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha/2}_{T;\Gamma} L^\infty(\rho)} < \infty \Big\}, \tag{3.20}$$

其中对于 $\beta \in (0,1)$,

$$\|f\|_{\mathbf{C}^{\beta}_{T;\Gamma} L^\infty(\rho)} := \sup_{0 \leqslant t \leqslant T} \|f(t)\|_{L^\infty(\rho)} + \sup_{s \neq t \in [0,T]} \frac{\|f(t) - \Gamma_{t-s} f(s)\|_{L^\infty(\rho)}}{|t-s|^\beta}.$$

对于 $\rho = 1$，我们简记

$$\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a} := \mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(1), \quad \mathbf{C}^{\beta}_{T;\Gamma} L^\infty := \mathbf{C}^{\beta}_{T;\Gamma} L^\infty(1).$$

注 3.2.1 (i) 在上述的定义中，Γ_t 的出现是为了反映传输项 $v \cdot \nabla_x$ 的作用 (上节中的 (3.18) 亦是如此). 值得注意的是这里关于动理学 Hölder 空间的定义与 [59] 中通过群语言定义的 Hölder 空间等价.

(ii) 下面的引理 3.3.1 为动理学 Hölder 空间下的 Schauder 估计. 当 f 与时间无关时, 我们可以发现 Schauder 估计同样在经典 Hölder 空间中成立.

基于定理 2.1.2，我们有下面的紧嵌入结果.

定理 3.2.1 (**紧嵌入**) 令 $T>0$，$\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 和 $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 2$. 若

$$D(R) := \sup_{|x|_a > R} \rho(x) \to 0 \quad \text{当 } R \to \infty,$$

则下面的嵌入是紧嵌入

$$\mathbb{C}^{\alpha_2}_{T,a}(\rho_1\rho_2) \hookrightarrow \mathbb{C}^{\alpha_1}_{T,a}(\rho_2), \quad \mathbb{S}^{\alpha_2}_{T,a}(\rho_1\rho_2) \hookrightarrow \mathbb{S}^{\alpha_1}_{T,a}(\rho_2).$$

证明 不失一般性，我们下面只证明 $\mathbb{S}^{\alpha_2}_{T,a}(\rho_1\rho_2) \hookrightarrow \mathbb{S}^{\alpha_1}_{T,a}(\rho_2)$ 是紧嵌入. 取 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 为 $\mathbb{S}^{\alpha_2}_{T,a}(\rho_1\rho_2)$ 中的有界集. 对于任意的 $R \geqslant 1$，由 (2.32)，存在一个常数 $C = C(R,T) > 0$ 使得对于所有的 $z_1, z_2 \in B^a_R$，

$$|f_n(t,z_1) - f_n(t,z_2)| \leqslant C|z_1 - z_2|_a^{\alpha_2/2},$$

以及对所有的 $z = (x,v) \in B^a_R$，

$$\begin{aligned} |f_n(t,z) - f_n(s,z)| &\leqslant |f_n(t,z) - f_n(s,\Gamma_{t-s}z)| + |f_n(s,\Gamma_{t-s}z) - f_n(s,z)| \\ &\lesssim_C |t-s|^{\alpha_2/2} + |(t-s)v|^{\alpha_2/6} \lesssim_C |t-s|^{\alpha_2/6}. \end{aligned}$$

因此，由 Ascoli-Arzelà 定理和其中的对角线选取子列的技巧，存在一个子列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ 和一个连续函数 f 使得对于任意的 $R \geqslant 1$，

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} \sup_{z\in B_R^a} |f_{n_k}(t,z) - f(t,z)| = 0. \tag{3.21}$$

特别地，$f \in \mathbb{S}_{T,a}^{\alpha_2}(\rho_1\rho_2)$. 此时我们只需要证明

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{\alpha_1}(\rho_2)} = 0. \tag{3.22}$$

注意到由定义可得对于任意的 $R \geqslant 1$

$$\|\mathbb{1}_{\{|z|_a > R\}}(f_{n_k} - f)\|_{\mathbb{L}_T^\infty(\rho_2)} \leqslant \|f_{n_k} - f\|_{\mathbb{L}_T^\infty(\rho_1\rho_2)}/D(R),$$

从而基于 (3.21)，我们有

$$\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_{\mathbb{L}_T^\infty(\rho_2)} = 0. \tag{3.23}$$

因为集合 $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathbb{S}_{T,a}^{\alpha_2}(\rho_2)$ 中是有界的，且插值不等式 (2.23) 可以推出

$$\|f\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{\alpha_1}(\rho_2)} \lesssim \|f\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{\alpha_2}(\rho_2)}^{\alpha_1/\alpha_2} \|f\|_{\mathbb{L}_T^\infty(\rho_2)}^{1-\alpha_1/\alpha_2},$$

所以我们由 (3.23) 得到 (3.22). 证毕. □

下一步我们将给出一个关于 $\mathbb{S}_{T,a}^{\alpha}(\rho)$ 的局部刻画. 在第五章，该刻画将会被用来得到一致的全局估计. 令 χ 是一个非负光滑函数满足

$$\chi(z) = 1, \ \ |z|_a \leqslant 1/8, \quad \chi(z) = 0, \ \ |z|_a > 1/4, \tag{3.24}$$

且对于任意的 $r > 0$ 和 $z_0 \in \mathbb{R}^{2d}$ 我们定义

$$\chi_r^{z_0}(z) := \chi\big(\tfrac{z-z_0}{r^a}\big), \ \ \phi_r^{z_0}(z) := \chi_{r(1+|z_0|_a)}^{z_0}(z), \tag{3.25}$$

其中我们用到了 (2.2) 中的记号.

接下来关于带权各向异性 Besov 空间的局部刻画的证明来自于 [114, 引理 3.8].

引理 3.2.1 令 $\alpha > 0$ 和 $r \in (0,1]$. 对于任意的 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$, 存在一个常数 $C = C(r,\alpha,d,\rho) > 0$ 使得

$$\|\phi_r^{z_0}\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho)} \lesssim_C \rho(z_0), \ \ z_0 \in \mathbb{R}^{2d}, \tag{3.26}$$

且对于任意的 $j \in \mathbb{N}$ 和 (3.5)中的 ϱ,

$$\|\nabla_v^j \phi_r^{z_0}\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho)} + \|v \cdot \nabla_x \phi_r^{z_0}\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho)} \lesssim_C (\varrho\rho)(z_0), \quad z_0 \in \mathbb{R}^{2d}. \tag{3.27}$$

此外, 对于任意的 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{P}_{\rm w}$, 存在一个常数 $C = C(r, \alpha, d, \rho_1, \rho_2) > 0$ 使得

$$\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1\rho_2)} \asymp_C \sup_{z_0 \in \mathbb{R}^{2d}} \big(\rho_1(z_0)\|\phi_r^{z_0} f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_2)}\big) \tag{3.28}$$

和

$$\|f\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \asymp_C \sup_{z_0 \in \mathbb{R}^{2d}} \big(\rho_1(z_0)\|\phi_r^{z_0} f\|_{L^\infty(\rho_2)}\big). \tag{3.29}$$

证明 我们只给出 (3.27) 和 (3.28) 的证明. (3.26) 和 (3.29) 的证明是类似的. 对于任意的 $j, k \in \mathbb{N}_0$, 由求导链式法则和 (3.24), (2.2) 的定义,

$$\nabla_v^j \nabla_x^k \phi_r^{z_0}(z) = [r(1 + |z_0|_a)]^{-j-3k} (\nabla_v^j \nabla_x^k \chi)\Big(\tfrac{z - z_0}{[r(1+|z_0|_a)]^a}\Big).$$

注意到

$$\mathcal{D} := \operatorname{supp}(\nabla_v^j \nabla_x^k \chi) \subset \Big\{z : |z - z_0|_a \leqslant \tfrac{1}{4} r(1 + |z_0|_a)\Big\}.$$

因为 $r < 1$, 显然对于任意的 $z = (x, v) \in \mathcal{D}$,

$$|v| \leqslant |z - z_0|_a + |z_0|_a \leqslant \tfrac{1}{4} + \tfrac{5}{4}|z_0|_a, \quad 1 + |z|_a \asymp 1 + |z_0|_a.$$

所以,

$$\|v \cdot \nabla_x \phi_r^{z_0}\|_{L^\infty(\rho)} = \sup_{z \in \mathbb{R}^{2d}} \big(|v \cdot \nabla_x \phi_r^{z_0}(z)|\rho(z)\big) \lesssim (\varrho\rho)(z_0),$$

且由链式法则对于任意的 $m \in \mathbb{N}$,

$$\|\nabla^m (v \cdot \nabla_x \phi_r^{z_0})\|_{L^\infty(\rho)} \lesssim (\varrho\rho)(z_0).$$

因此由 (2.28) 可得

$$\|v \cdot \nabla_x \phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho)} \lesssim \|\nabla^{[\alpha]+1}(v \cdot \nabla_x \phi_r^z)\|_{L^\infty(\rho)} + \|v \cdot \nabla_x \phi_r^z\|_{L^\infty(\rho)} \lesssim (\varrho\rho)(z_0).$$

类似地,

$$\|\nabla_v^j \phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho)} \lesssim (\varrho\rho)(z_0).$$

下面我们证明 (3.28). 利用定义, 易知存在一个 δ 使得对于任意的 h 且 $|h|_a < \delta$,

$$\delta_h^{([\alpha]+1)} f(z_0) = \delta_h^{([\alpha]+1)} (\phi_r^{z_0} f)(z_0).$$

因此，基于定理 2.1.2，

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1\rho_2)} &\lesssim \sup_{z_0}(\rho_1\rho_2)(z_0)\left[\sup_{|h|_a\leqslant\delta}\frac{\delta_h^{([\alpha]+1)}(\phi_r^{z_0}f)(z_0)}{|h|_a^\alpha}+(\phi_r^{z_0}f)(z_0)\right]\\ &\lesssim \sup_{z_0}\|\phi_r^{z_0}f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1\rho_2)}\lesssim \sup_{z_0}\|\phi_{2r}^{z_0}\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|\phi_r^{z_0}f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_2)}\overset{(3.26)}{\lesssim}\sup_{z_0}\rho_1(z_0)\|\phi_r^{z_0}f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_2)}.\end{aligned}$$

这里我们在第三个不等式处使用了 $\phi_r^{z_0}=\phi_{2r}^{z_0}\phi_r^{z_0}$. 另外，

$$\sup_{z_0}\rho_1(z_0)\|\phi_r^{z_0}f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_2)}\lesssim\sup_{z_0}\rho_1(z_0)\|\phi_r^{z_0}\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1^{-1})}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1\rho_2)}\overset{(3.26)}{\lesssim}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1\rho_2)}.$$

因此 (3.28) 可得. 证毕. □

为了给出动理学 Hölder 不等式的局部化刻画，我们还需要下面初等的结论.

引理 3.2.2 对于任意的 $z_0\in\mathbb{R}^{2d}$ 和 $|t|\leqslant r^3<1$，下式成立：

$$\phi_r^{z_0}\Gamma_t\phi_{8r}^{z_0}=\phi_r^{z_0},\tag{3.30}$$

且对于任意的 $j=0,1$，存在一个常数 $C=C(r,d)>0$ 使得

$$\|\Gamma_t\nabla_v^j\phi_r^{z_0}-\nabla_v^j\phi_r^{z_0}\|_{L^\infty}\lesssim_C|t|/(1+|z_0|_a^{2+j}).\tag{3.31}$$

证明 对于任意的 $|t|\leqslant r^3<1$，由 Young 不等式我们有

$$|tv|^{1/3}\leqslant r\left(\tfrac{2}{3}+\tfrac{|v|}{3}\right).$$

等式 (3.30) 可由下面的观察得到：

$$\mathrm{supp}(\phi_r^{z_0})\subset B^a_{r(1+|z_0|_a)/4}(z_0)\subset\Gamma_tB^a_{r(1+|z_0|_a)}(z_0)$$

且 $\phi_{8r}^{z_0}\equiv1$ 在 $B^a_{r(1+|z_0|_a)}(z_0)$ 内. 对于 (3.31)，注意到对于任意的 $z=(x,v)$，

$$\begin{aligned}|\Gamma_t\nabla_v^j\phi_r^{z_0}(z)-\nabla_v^j\phi_r^{z_0}(z)|&\leqslant\sup_{s\in[0,t]}t|v|\,|\nabla_x\nabla_v^j\phi_r^{z_0}(\Gamma_sz)|\cdot\mathbb{1}_{\{|\Gamma_sz-z_0|_a\leqslant r(1+|z_0|_a)/4\}}\\&\leqslant t|z|_a\frac{\|\nabla_x\nabla_v^j\chi\|_{L^\infty}}{(r(1+|z_0|_a))^{3+j}}\mathbb{1}_{\{|z-z_0|_a\leqslant r(1+|z_0|_a)\}}\\&\lesssim t/(1+|z_0|_a^{2+j}).\end{aligned}$$

证毕. □

现在我们给出下面的关于空间 $\mathbb{S}^\alpha_{T,a}(\rho)$ 局部化刻画的结果.

引理 3.2.3 对于任意的 $\alpha\in(0,2)$，$r\in(0,1/8)$，$\rho\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 和 $T>0$，存在一个常数 $C=C(T,r,\alpha,d,\rho)>0$ 使得

$$\|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(\rho)}\asymp_C\sup_{z_0}\Big(\rho(z_0)\|\phi^{z_0}_r f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}}\Big). \tag{3.32}$$

证明 基于(3.28)，我们只需要证明：对于任意的 $\alpha\in(0,1)$，

$$\|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_{T;\Gamma}L^\infty(\rho)}\asymp\sup_{z}\Big(\rho(z)\|\phi^{z}_r f\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_{T;\Gamma}L^\infty}\Big).$$

利用定义和 (3.8), (3.29), 证明下面的论断即可.

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_{L^\infty(\rho)}+\sup_{0<|t-s|\leqslant r^3}\sup_z\frac{\rho(z)\|\phi^z_r f(t)-\phi^z_r\Gamma_{t-s}f(s)\|_{L^\infty}}{|t-s|^\alpha}\\ &\asymp\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|f(t)\|_{L^\infty(\rho)}+\sup_{0<|t-s|\leqslant r^3}\sup_z\frac{\rho(z)\|\phi^z_r f(t)-\Gamma_{t-s}(\phi^z_r f)(s)\|_{L^\infty}}{|t-s|^\alpha}.\end{aligned}\tag{3.33}$$

因为 $\phi^z_r=\phi^z_r\phi^z_{8r}$，从 (3.30) 中可得

$$\phi^z_r\Gamma_t f-\Gamma_t(\phi^z_r f)=\phi^z_r\Gamma_t(\phi^z_{8r}f)-\Gamma_t(\phi^z_r\phi^z_{8r}f),\quad \forall t\in[0,r^3].$$

因此基于如下事实：$\Gamma_t(fg)=\Gamma_t f\Gamma_t g$ 和 (3.31)，可得

$$\begin{aligned}&\sup_{0<|t-s|\leqslant r^3}\sup_z\frac{\rho(z)\|\phi^z_r\Gamma_{t-s}f(s)-\Gamma_{t-s}(\phi^z_r f)(s)\|_{L^\infty}}{|t-s|^\alpha}\\ &=\sup_{0<|t-s|\leqslant r^3}\sup_z\frac{\rho(z)\|\phi^z_r\Gamma_{t-s}(\phi^z_{8r}f(s))-\Gamma_{t-s}(\phi^z_r\phi^z_{8r}f)(s)\|_{L^\infty}}{|t-s|^\alpha}\\ &\lesssim\sup_{0<|t-s|\leqslant r^3}\sup_z\frac{\rho(z)\|\Gamma_{t-s}(\phi^z_{8r}f(s))\|_{L^\infty}\|\phi^z_r-\Gamma_{t-s}\phi^z_r\|_{L^\infty}}{|t-s|^\alpha}\\ &\lesssim\sup_{0<|t-s|\leqslant r^3}\sup_z\frac{\rho(z)\|\phi^z_{8r}f(s)\|_{L^\infty}|t-s|}{|t-s|^\alpha}\lesssim\sup_{0\leqslant s\leqslant T}\|f(s)\|_{L^\infty(\rho)}.\end{aligned}$$

即为所证. □

在本节的最后，我们给出下面的关于梯度算子在动理学 Hölder 空间中的影响的结果.

引理 3.2.4 对于任意的 $\alpha\in(1,2)$，$T>0$ 和 $\rho\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，存在一个常数 $C=C(\rho,T,\alpha,d)>0$ 使得对于所有的 $f\in\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(\rho)$，

$$\|\nabla_v f\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}(\rho)}\lesssim_C\|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(\rho)}. \tag{3.34}$$

证明 首先我们对 $\rho=1$ 证明 (3.34). 固定 $\alpha\in(1,2)$, $s,t\in[0,T]$ 和 $z\in\mathbb{R}^{2d}$. 由定义可得对于任意的 $\bar z=(0,\bar v)\in\mathbb{R}^{2d}$,

$$\mathcal{I}_1:=|f(t,\bar z+z)-f(s,\Gamma_{t-s}z)-\bar v\cdot(\nabla_v f)(s,\Gamma_{t-s}z)|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant |f(t,\bar z+z)-f(s,\Gamma_{t-s}(\bar z+z))|+|f(s,\Gamma_{t-s}(\bar z+z))-f(s,\bar z+\Gamma_{t-s}z)|\\
&\quad +|f(s,\bar z+\Gamma_{t-s}z)-f(s,\Gamma_{t-s}z)-\bar v\cdot(\nabla_v f)(s,\Gamma_{t-s}z)|\\
&\lesssim |t-s|^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{\mathbf{C}^{\alpha/2}_{T;\Gamma}L^\infty}+|(t-s)\bar v|^{\frac{\alpha}{3}}\|f(s)\|_{\mathbf{C}^{\alpha/3}_x}+|\bar v|^{\alpha}\|\nabla_v f(s)\|_{\mathbf{C}^{\alpha-1}_v}\\
&\lesssim (|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|\bar v|^{\alpha})\|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}},
\end{aligned}
$$

其中我们在最后一步用到了 $|(t-s)\bar v|^{\frac{\alpha}{3}}\leqslant\frac{3}{2}|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+3|\bar v|^{\alpha}$. 通过交换 $s\leftrightarrow t$ 并将 z 等于 $\Gamma_{t-s}z$ 代入，我们有

$$
\mathcal{I}_2:=|f(s,\bar z+\Gamma_{t-s}z)-f(t,z)-\bar v\cdot(\nabla_v f)(t,z)|\lesssim(|t-s|^{\frac{\alpha}{2}}+|\bar v|^{\alpha})\|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}}.
$$

令 ω 是满足如下条件的 $\mathbb{R}^d$ 中的单位向量

$$
\mathcal{I}:=|(\nabla_v f)(t,z)-(\nabla_v f)(s,\Gamma_{t-s}z)|=\omega\cdot[(\nabla_v f)(t,z)-(\nabla_v f)(s,\Gamma_{t-s}z)].
$$

令 $\bar v=(t-s)^{\frac{1}{2}}\omega$ 且 $\bar z=(0,\bar v)$. 则

$$
\begin{aligned}
(t-s)^{\frac{1}{2}}\mathcal{I}&\leqslant \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+|f(t,\bar z+z)-f(s,\bar z+\Gamma_{t-s}z)|+|f(t,z)-f(s,\Gamma_{t-s}z)|\\
&\leqslant \mathcal{I}_1+\mathcal{I}_2+|(t-s)\bar v|^{\frac{\alpha}{3}}\|f(s,\cdot)\|_{\mathbf{C}^{\alpha}_a}+2\|f(t)-\Gamma_{t-s}f(s)\|_{L^\infty}\\
&\lesssim (t-s)^{\frac{\alpha}{2}}\|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}}.
\end{aligned}
$$

因此，

$$
\mathcal{I}=|(\nabla_v f)(t,z)-(\nabla_v f)(s,\Gamma_{t-s}z)|\lesssim(t-s)^{\frac{\alpha-1}{2}}\|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}}. \tag{3.35}
$$

此外，由 Bernstein 不等式 (2.16)，显然有

$$
\|\nabla_v f\|_{\mathbb{C}^{\alpha-1}_{T,a}}\lesssim\|f\|_{\mathbb{C}^{\alpha}_{T,a}},
$$

联立 (3.35) 对于 $\rho=1$ 可得 (3.34).

接下来，对于 $\beta\in(0,2)$，注意到由 (3.31) 和动理学 Hölder 空间的定义可得

$$
\|\nabla_v\phi^z_r g\|_{\mathbf{C}^{\beta/2}_{T;\Gamma}L^\infty}\lesssim(1+|z|_a)^{-1}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta/2}_{T;\Gamma}L^\infty}
$$

和

$$
\|\nabla_v\phi^z_r g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a}\lesssim\|\nabla_v\phi^z_r\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a}\lesssim(1+|z|_a)^{-1}\|g\|_{\mathbf{C}^{\beta}_a}.
$$

因此，

$$
\|\nabla_v\phi^z_r g\|_{\mathbb{S}^{\beta}_{T,a}}\lesssim(1+|z|_a)^{-1}\|g\|_{\mathbb{S}^{\beta}_{T,a}}. \tag{3.36}
$$

现在，对于任意的 $r \in (0,1/16)$，基于引理 3.2.3 和 (3.36) 我们有

$$\begin{aligned}\|\nabla_v f\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}(\rho)} &\asymp \sup_z \rho(z)\|\phi^z_r \nabla_v f\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}} \\ &\lesssim \sup_z \rho(z)\|\nabla_v(\phi^z_r f)\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}} + \sup_z \rho(z)\|\nabla_v \phi^z_r f\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}} \\ &\lesssim \sup_z \rho(z)\|\phi^z_r f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}} + \sup_z \rho(z)\|\nabla_v \phi^z_r(\phi^z_{2r} f)\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(\rho)} + \sup_z \rho(z)\|\phi^z_{2r} f\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}} \lesssim \|f\|_{\mathbb{S}^{\alpha}_{T,a}(\rho)}.\end{aligned}$$

这里在第二个不等式处我们使用了 $\rho = 1$ 时的 (3.34). 证毕. □

3.3 Schauder 估计

给定任意的 $\lambda \geqslant 0$ 和 $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d}))$, 我们考虑下面的 model 动理学方程:

$$\mathscr{L}_\lambda u := (\partial_t - \Delta_v + \lambda - v \cdot \nabla_x)u = f, \quad u(0) = 0.$$

基于 Duhamel 公式，上述方程的唯一解由下面的显示形式给出

$$u(t,\cdot) = \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} P_{t-s} f(s,\cdot)\mathrm{d}s := \mathscr{I}_\lambda f(t,\cdot). \tag{3.37}$$

换句话说, $\mathscr{I}_\lambda$ 是算子 $\mathscr{L}_\lambda$ 的逆算子. 对于任意的 $q \in [1,\infty]$, $T > 0$ 和任意的 Banach 空间 $\mathbb{B}$，记

$$L^q_T(\mathbb{B}) := L^q([0,T]; \mathbb{B}).$$

现在我们给出下面的 Schauder 估计的结果.

引理 3.3.1 (Schauder 估计) 令 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，$\beta \in (0,2)$ 和 $\theta \in (\beta, 2]$. 对于任意的 $q \in [\frac{2}{2-\theta}, \infty]$ 和 $T > 0$, 存在一个常数 $C = C(d,\beta,\theta,q,T) > 0$ 使得对于所有的 $\lambda \geqslant 0$ 和 $f \in L^q_T \mathbf{C}^{-\beta}_a(\rho)$,

$$\|\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{S}^{\theta-\beta}_{T,a}(\rho)} \lesssim_C (\lambda \vee 1)^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{q}-1} \|f\|_{L^q_T \mathbf{C}^{-\beta}_a(\rho)}. \tag{3.38}$$

证明 令 $q \in [\frac{2}{2-\theta}, \infty]$ 和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{\theta}{2} = 1$. 由 (3.15) 和 Hölder 不等式，对于任意的 $\beta \in \mathbb{R}$ 有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}^a_j \mathscr{I}_\lambda f(t)\|_{L^\infty(\rho)} &\lesssim \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)} 2^{j\beta}(1 \wedge ((t-s)4^j)^{-2})\|f(s)\|_{\mathbf{C}^{-\beta}_a(\rho)}\mathrm{d}s \\ &\lesssim 2^{j\beta}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda p s}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^t (1 \wedge (s4^j)^{-\frac{4}{\theta}})\mathrm{d}s\right)^{\frac{\theta}{2}} \|f\|_{L^q_T \mathbf{C}^{-\beta}_a(\rho)}\end{aligned}$$

$$\lesssim 2^{j(\beta-\theta)}(\lambda\vee 1)^{-\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty (1\wedge s^{-\frac{4}{\theta}})\mathrm{d}s\right)^{\frac{\theta}{2}}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}.$$

从此可以推断出对于任意的 $\beta\in\mathbb{R}$,

$$\|\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{\theta-\beta}(\rho)}\lesssim(\lambda\vee 1)^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{q}-1}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}. \tag{3.39}$$

从时间正则性来看，令 $u:=\mathscr{I}_\lambda f$. 对于任意的 $0\leqslant t_1<t_2\leqslant T$，我们有

$$\begin{aligned}
u(t_2)-\Gamma_{t_2-t_1}u(t_1)&=\int_0^{t_1}\left(\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)}-\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-s)}\right)P_{t_2-s}f(s)\mathrm{d}s\\
&\quad+\left(P_{t_2-t_1}-\Gamma_{t_2-t_1}\right)\mathscr{I}_\lambda f(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)}P_{t_2-s}f(s)\mathrm{d}s\\
&:=I_1+I_2+I_3.
\end{aligned}$$

记

$$q':=q/(q-1).$$

对于 I_1，由 (3.17) 和 Hölder 不等式，对于任意的 $\beta>0$ 有

$$\begin{aligned}
\|I_1\|_{L^\infty(\rho)}&\leqslant|\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-t_1)}-1|\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-s)}\|P_{t_2-s}f(s)\|_{L^\infty(\rho)}\mathrm{d}s\\
&\lesssim[\lambda(t_2-t_1)\wedge 1]\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda(t_1-s)}(t_2-s)^{-\frac{\beta}{2}}\|f(s)\|_{\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}\mathrm{d}s\\
&\leqslant[\lambda(t_2-t_1)]^{\frac{\theta}{2}}(t_2-t_1)^{-\frac{\beta}{2}}\left(\int_0^{t_1}\mathrm{e}^{-\lambda q's}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q'}}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}\\
&\lesssim(t_2-t_1)^{\frac{\theta-\beta}{2}}(\lambda\vee 1)^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{q}-1}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}.
\end{aligned}$$

对于 I_2，基于 (3.18) 和 (3.39), 对于任意的 $\beta\in(\theta-2,\theta)$ 我们有

$$\begin{aligned}
\|I_2\|_{L^\infty(\rho)}&\leqslant(t_2-t_1)^{\frac{\theta-\beta}{2}}\|\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{\theta-\beta}(\rho)}\\
&\lesssim(t_2-t_1)^{\frac{\theta-\beta}{2}}(\lambda\vee 1)^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{q}-1}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}.
\end{aligned}$$

现在来看 I_3，从 (3.17), Hölder 不等式和变量替换中我们可以得到对于任意的 $\beta\in(0,\theta)$,

$$\begin{aligned}
\|I_3\|_{L^\infty(\rho)}&\lesssim\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{e}^{-\lambda(t_2-s)}(t_2-s)^{-\frac{\beta}{2}}\|f(s)\|_{\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}\mathrm{d}s\\
&\lesssim\left(\int_0^{t_2-t_1}\mathrm{e}^{-q'\lambda s}s^{-\frac{q'\beta}{2}}\mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{q'}}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}\\
&\lesssim\left((t_2-t_1)^{\frac{1}{q'}-\frac{\beta}{2}}\wedge\lambda^{\frac{\beta}{2}-\frac{1}{q'}}\right)\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}
\end{aligned}$$

$$\lesssim (t_2-t_1)^{\frac{\theta-\beta}{2}}\lambda^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{q}-1}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)},$$

其中我们在第三个不等式处使用了插值不等式 $a^\gamma\wedge b^{-\gamma}\leqslant a^\delta b^{\delta-\gamma}$ 其中 $a,b>0$ 且 $0<\delta\leqslant\gamma$. 联立上述所有的计算，我们可以得到

$$\|\mathscr{I}_\lambda f\|_{C_\Gamma^{(\theta-\beta)/2}L^\infty(\rho)}\lesssim(\lambda\vee 1)^{\frac{\theta}{2}+\frac{1}{q}-1}\|f\|_{L^q_T\mathbf{C}_a^{-\beta}(\rho)}.$$

即为所证. □

3.4 动理学算子的交换子估计

在第 2.2 节中，我们已经建立了在带权的各向异性 Besov 空间下关于 Bony 仿积的交换子估计. 在本节中，我们利用上面几节关于动理学算子半群 P_t 的估计，建立拟控制计算中关于动理学算子半群的交换子估计. 这类估计在 [46] 中定义拟控制解时亦是不可或缺的. 相比与该文章中的经典的热半群，我们这里的动理学算子半群并不是一个 Fourier 乘子. 所以我们在下面 (3.40) 中左边的交换子中引入 Γ_t，从而导致关于 $\mathscr{I}_\lambda$ 的交换子估计在动理学 Hölder 空间中完成 (见下面的引理 3.4.2). 在关于该交换子的证明中，尤其是在处理主要项 $I_j^{(0)}$ 时，我们发现与 $\Gamma_t p_t*$ 的交换可以从函数 f 中获得正则性，然而如果单单考虑与 Γ_t 的交换则不能. 值得注意的是我们上面得到的分解 (3.14) 在本节的证明中扮演着至关重要的角色.

引理 3.4.1 令 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{P}_{\rm w}$. 对于任意的 $\alpha\in(0,1)$，$\beta\in\mathbb{R}$, $\delta\geqslant 0$ 和 $T>0$, 存在常数 $C=C(\rho_1,\rho_2,\alpha,\beta,\delta,T,d)>0$ 使得对于所有的 $f\in\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)$，$g\in\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)$ 和 $t\in(0,T]$, $j\geqslant -1$,

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{R}_j^aP_t(f\prec g)-\mathcal{R}_j^a(\Gamma_tf\prec P_tg)\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)}\\&\qquad\lesssim_C t^{-\frac{\delta}{2}}2^{-(\alpha+\beta+\delta)j}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.\end{aligned}\tag{3.40}$$

证明 不失一般性，我们只对 $j\geqslant 3$ 证明 (3.40) 并假设 $\beta\neq 0,-\alpha$. 当 $\beta=0$ 或 $-\alpha$ 时，我们可以利用插值引理 2.1.2 得到证明. 首先，由 (2.10)，(3.14) 和仿积运算 $\prec$ 的定义，我们有

$$\mathcal{R}_j^aP_t(f\prec g)=\sum_{\ell\sim j}\sum_{i\in\Theta_\ell^t}\sum_{k\geqslant -1}\mathcal{R}_j^a\mathcal{R}_\ell^aP_t\mathcal{R}_i^a(S_{k-1}f\mathcal{R}_k^ag),$$

其中

$$\ell\sim j\iff|\ell-j|\leqslant 3.$$

注意到由 (2.15) 可得

$$\mathcal{R}_i^a(S_{k-1}f\mathcal{R}_k^a g)=0 \text{ 对于 } i\in\Theta_\ell^t \text{ 和 } \ k\notin\Theta_\ell^t\pm 3,$$

其中

$$\Theta_\ell^t\pm 3:=\{k\geqslant 0:|k-i|\leqslant 3,\ i\in\Theta_\ell^t\},$$

进一步我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_j^a P_t(f\prec g)&=\sum_{\ell\sim j}\sum_{i\in\Theta_\ell^t}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\mathcal{R}_j^a\mathcal{R}_\ell^a P_t\mathcal{R}_i^a(S_{k-1}f\mathcal{R}_k^a g)\\&\overset{(3.14)}{=}\sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\mathcal{R}_j^a\mathcal{R}_\ell^a P_t(S_{k-1}f\mathcal{R}_k^a g).\end{aligned}$$

类似地, 由 (2.15) 我们也可以得到

$$\mathcal{R}_j^a(\Gamma_t f\prec P_t g)=\sum_{\ell\sim j}\mathcal{R}_j^a(S_{\ell-1}\Gamma_t f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t g)=:I_j^{(1)}+I_j^{(2)},$$

其中

$$\begin{aligned}I_j^{(1)}&:=\sum_{\ell\sim j}\mathcal{R}_j^a(\Gamma_t S_{\ell-1}f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t g),\\I_j^{(2)}&:=\sum_{\ell\sim j}\mathcal{R}_j^a([S_{\ell-1},\Gamma_t]f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t g).\end{aligned}$$

对于 $I_j^{(1)}$，依然由 (3.14)，我们可以得到

$$\begin{aligned}I_j^{(1)}&=\sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\mathcal{R}_j^a(\Gamma_t S_{\ell-1}f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t\mathcal{R}_k^a g)\\&=\sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\mathcal{R}_j^a(\Gamma_t(S_{\ell-1}-S_{k-1})f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t\mathcal{R}_k^a g)\\&\quad+\sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\mathcal{R}_j^a(\Gamma_t S_{k-1}f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t\mathcal{R}_k^a g)=:I_j^{(11)}+I_j^{(12)}.\end{aligned}$$

联立上述计算，我们有

$$\mathcal{R}_j^a P_t(f\prec g)-\mathcal{R}_j^a(\Gamma_t f\prec P_t g)=I_j^{(0)}-I_j^{(11)}-I_j^{(2)},$$

其中

$$I_j^{(0)}:=\sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\mathcal{R}_j^a\Big(\mathcal{R}_\ell^a P_t(S_{k-1}f\mathcal{R}_k^a g)-\Gamma_t S_{k-1}f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t\mathcal{R}_k^a g\Big).$$

对于 $I_j^{(0)}$，令 $F_k := S_{k-1}f$ 和 $G_k := \mathcal{R}_k^a g$. 我们注意到

$$\begin{aligned}
J_{k\ell} &:= \mathcal{R}_\ell^a P_t(S_{k-1}f\mathcal{R}_k^a g) - \Gamma_t S_{k-1}f \cdot \mathcal{R}_\ell^a P_t \mathcal{R}_k^a g \\
&\overset{(3.1)}{=} (\mathcal{R}_\ell^a \Gamma_t p_t) * \Gamma_t(F_k G_k) - \Gamma_t F_k(\mathcal{R}_\ell^a \Gamma_t p_t * \Gamma_t G_k) \\
&= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathcal{R}_\ell^a \Gamma_t p_t(\bar{z})(\Gamma_t F_k(z-\bar{z}) - \Gamma_t F_k(z))\Gamma_t G_k(z-\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}.
\end{aligned}$$

基于 (2.32), (3.8) 和 (3.9)，可得存在一个常数 $\delta_0 > 0$ 使得对于所有的 $m \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\|J_{k\ell}\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\mathcal{R}_\ell^a \Gamma_t p_t(\bar{z})||\Gamma_t \bar{z}|_a^\alpha (1+|\bar{z}|_a^{\delta_0})\mathrm{d}\bar{z}\right)\|F_k\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|G_k\|_{L^\infty(\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-\alpha\ell}(1\wedge(t4^\ell)^{-m})\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)} 2^{-\beta k}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.
\end{aligned}$$

所以，联立 (3.13)，对任意的 $\beta \neq 0$ 有

$$\begin{aligned}
\|I_j^{(0)}\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} &\lesssim \sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3} 2^{-\alpha\ell-\beta k}(1\wedge(t4^\ell)^{-|\beta|-\frac{\delta}{2}})\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-j(\alpha+\beta)}(1+(t4^j))^{|\beta|}(1\wedge(t4^j)^{-|\beta|-\frac{\delta}{2}})\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-j(\alpha+\beta)}(t4^j)^{-\frac{\delta}{2}}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.
\end{aligned}$$

对于 $I_j^{(11)}$，由 (3.15) 可知对于任意的 $m \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\|I_j^{(11)}\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} &\lesssim \sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\|\Gamma_t(S_{\ell-1}-S_{k-1})f\cdot\mathcal{R}_\ell^a P_t\mathcal{R}_k^a g\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \\
&\lesssim \sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\|(S_{\ell-1}-S_{k-1})f\|_{L^\infty(\rho_1)}\|\mathcal{R}_\ell^a P_t\mathcal{R}_k^a g\|_{L^\infty(\rho_2)} \\
&\lesssim \sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\sum_{i=k\wedge\ell}^{k\vee\ell}\|\mathcal{R}_i^a f\|_{L^\infty(\rho_1)}(1\wedge(t4^\ell)^{-m})\|\mathcal{R}_k^a g\|_{\mathbf{C}_a^0(\rho_2)} \\
&\lesssim \sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3}\left(\sum_{i=k\wedge\ell-1}^{k\vee\ell-2} 2^{-i\alpha}\right)(1\wedge(t4^j)^{-m})\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|\mathcal{R}_k^a g\|_{L^\infty(\rho_2)} \\
&\lesssim \sum_{\ell\sim j}\sum_{k\in\Theta_\ell^t\pm 3} 2^{-(k\wedge\ell)\alpha}2^{-k\beta}(1\wedge(t4^j)^{-m})\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-(\alpha+\beta)j}(1+t4^j)^{\alpha+|\beta|}(1\wedge(t4^j)^{-m})\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)},
\end{aligned}$$

其中最后一步我们使用了 $2^{-(k\wedge\ell)\alpha} \leqslant 2^{-k\alpha}+2^{-\ell\alpha}$, (3.13) 和 $\beta \neq 0, -\alpha$. 取 $m = \alpha+|\beta|+\delta/2$ 可得

$$\|I_j^{(11)}\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \lesssim 2^{-(\alpha+\beta)j}(t4^j)^{-\delta/2}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.$$

对于 $I_j^{(2)}$，注意到

$$[S_{\ell-1},\Gamma_t]f=\sum_{i=-1}^{\ell-2}[\mathcal{R}_i^a,\Gamma_t]f=-\sum_{i=\ell-1}^{\infty}[\mathcal{R}_i^a,\Gamma_t]f,$$

且由分块算子 $\mathcal{R}_i^a$ 的定义，

$$[\mathcal{R}_i^a,\Gamma_t]f(z)=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\check{\phi}_i^a(\bar{z})(f(\Gamma_t(z-\bar{z}))-f(\Gamma_t z-\bar{z}))\mathrm{d}\bar{z},$$

这时我们对任意的 $\delta_0>0$ 和所有的 i 有

$$\begin{aligned}
&\|[\mathcal{R}_i^a,\Gamma_t]f\|_{L^\infty(\rho_1)}\\
&\leqslant\sup_{z\in\mathbb{R}^{2d}}\rho_1(z)\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\check{\phi}_i^a(\bar{z})|\big|f(\Gamma_t(z-\bar{z}))-f(\Gamma_t z-\bar{z})\big|\mathrm{d}\bar{z}\\
&\overset{(3.6)}{\lesssim}\sup_{z\in\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\check{\phi}_i^a(\bar{z})|(1+|\bar{z}|_a)^{\delta_0}\big|f(\Gamma_t(z-\bar{z}))-f(\Gamma_t z-\bar{z})\big|\rho_1(z-\bar{z})\mathrm{d}\bar{z}\\
&\overset{(3.8)}{\lesssim}\sup_{z\in\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\check{\phi}_i^a(\bar{z})|(1+|\bar{z}|_a)^{\delta_0}\big|f(\Gamma_t(z-\bar{z}))-f(\Gamma_t z-\bar{z})\big|\rho_1(\Gamma_t(z-\bar{z}))\mathrm{d}\bar{z}\\
&\overset{(2.32)}{\lesssim}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\check{\phi}_i^a(\bar{z})|(1+|\bar{z}|_a)^{\delta_0}|(t|\bar{v}|)^{\frac{\alpha}{3}}(1+t|\bar{v}|)^{\delta_0}\|f\|_{\mathbf{C}_x^{\alpha/3}(\rho_1)}\mathrm{d}\bar{z}\\
&\lesssim(t2^{-i})^{\frac{\alpha}{3}}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)},
\end{aligned}$$

此外，

$$\|[S_{\ell-1},\Gamma_t]f\|_{L^\infty(\rho_1)}\lesssim\sum_{i=\ell-1}^{\infty}(t2^{-i})^{\frac{\alpha}{3}}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\lesssim t^{\frac{\alpha}{3}}2^{-\frac{\alpha\ell}{3}}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}.$$

因此，由 (3.15),

$$\begin{aligned}
\|I_j^{(2)}\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)}&\lesssim\sum_{\ell\sim j}\|[S_{\ell-1},\Gamma_t]f\|_{L^\infty(\rho_1)}\|\mathcal{R}_\ell^a P_t g\|_{L^\infty(\rho_2)}\\
&\lesssim\sum_{\ell\sim j}t^{\frac{\alpha}{3}}2^{-\frac{\alpha\ell}{3}}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}2^{-\beta\ell}(t4^\ell)^{-\frac{\alpha}{3}-\frac{\delta}{2}}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}\\
&\lesssim t^{-\delta/2}2^{-(\alpha+\beta+\delta)j}\|f\|_{\mathbf{C}_a^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)}.
\end{aligned}$$

证毕. □

利用上面的引理，我们可以给出下面的核心交换子估计.

引理 3.4.2 令 $\rho_1,\rho_2\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 和 $\alpha\in(0,1)$，$\beta\in\mathbb{R}$. 对任意的 $k=0,1$，$T>0$ 和 $\theta\in[0,2]$，存在一个常数 $C>0$ 使得对于所有的 $\lambda\geqslant0$,

$$\|[\nabla_v^k\mathscr{I}_\lambda,f\prec]g\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{\alpha+\beta+\theta-k}(\rho_1\rho_2)}\lesssim_C(\lambda\vee1)^{\frac{\theta-2}{2}}\|f\|_{\mathbb{S}_{T,a}^\alpha(\rho_1)}\|g\|_{\mathbb{C}_{T,a}^\beta(\rho_2)}.\tag{3.41}$$

证明 当 $k=0$ 时，基于 $\mathscr{I}_\lambda$ 的定义 (3.37)，我们有

$$\begin{aligned}
[\mathscr{I}_\lambda, f \prec]g(t) &= \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\Big(P_{t-s}(f(s)\prec g(s)) - f(t)\prec P_{t-s}g(s)\Big)\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}\Big(P_{t-s}(f(s)\prec g(s)) - \Gamma_{t-s}f(s)\prec P_{t-s}g(s)\Big)\mathrm{d}s \\
&\quad + \int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda(t-s)}(\Gamma_{t-s}f(s)-f(t))\prec P_{t-s}g(s)\mathrm{d}s \\
&=: I_1(t)+I_2(t).
\end{aligned}$$

对于 $I_1(t)$，利用引理 3.4.1，其中取 $\delta=0,4$，我们有

$$\|\mathcal{R}_j^a I_1(t)\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \lesssim 2^{-(\alpha+\beta)j}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}((4^js)^{-2}\wedge 1)\mathrm{d}s\|f\|_{\mathbb{C}^\alpha_{T,a}(\rho_1)}\|g\|_{\mathbb{C}^\beta_{T,a}(\rho_2)}.$$

我们注意到由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}
\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}((4^js)^{-2}\wedge 1)\mathrm{d}s &\leqslant \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-\frac{2\lambda s}{2-\theta}}\mathrm{d}s\right)^{\frac{2-\theta}{2}}\left(\int_0^t ((4^js)^{-2}\wedge 1)^{\frac{2}{\theta}}\mathrm{d}s\right)^{\frac{\theta}{2}} \\
&\lesssim (\lambda\vee 1)^{\frac{\theta-2}{2}}2^{-\theta j}. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

因此，

$$\|\mathcal{R}_j^a I_1(t)\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \lesssim (\lambda\vee 1)^{\frac{\theta-2}{2}}2^{-(\alpha+\beta+\theta)j}\|f\|_{\mathbb{C}^\alpha_{T,a}(\rho_1)}\|g\|_{\mathbb{C}^\beta_{T,a}(\rho_2)}.$$

我们来看 $I_2(t)$，对于任意的 $\gamma>0$，注意到由 (2.38) 有

$$\begin{aligned}
&\|\mathcal{R}_j^a((\Gamma_{t-s}f(s)-f(t))\prec P_{t-s}g(s))\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-(\gamma+\beta)j}\|\Gamma_{t-s}f(s)-f(t)\|_{L^\infty(\rho_1)}\|P_{t-s}g(s)\|_{\mathbf{C}_a^{\gamma+\beta}(\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-(\gamma+\beta)j}(t-s)^{\frac{\alpha-\gamma}{2}}\|f\|_{\mathbb{S}^\alpha_{T,a}(\rho_1)}\|g(s)\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_2)},
\end{aligned}$$

联立 (3.42) 可得

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{R}_j^a I_2(t)\|_{L^\infty(\rho_1\rho_2)} &\lesssim 2^{-(\alpha+\beta)j}\int_0^t \mathrm{e}^{-\lambda s}(1\wedge(s4^j)^{-2})\mathrm{d}s\|f\|_{\mathbb{S}^\alpha_{T,a}(\rho_1)}\|g\|_{\mathbb{C}^\beta_{T,a}(\rho_2)} \\
&\lesssim 2^{-(\alpha+\beta+\theta)j}(\lambda\vee 1)^{\frac{\theta-2}{2}}\|f\|_{\mathbb{S}^\alpha_{T,a}(\rho_1)}\|g\|_{\mathbb{C}^\beta_{T,a}(\rho_2)}.
\end{aligned}$$

综上，当 $k=0$ 时我们得到了 (3.41). 注意到

$$[\nabla_v\mathscr{I}_\lambda, f\prec]g = \nabla_v[\mathscr{I}_\lambda, f\prec]g + \nabla_v f(t)\prec\mathscr{I}_\lambda g.$$

当 $k=1$ 时，基于我们已经得到结果和引理 2.2.1 以及 (3.39)，估计 (3.41) 可得. 证毕. □

下面的交换子估计是引理 3.4.2，引理 2.2.1 和引理 2.2.4 的直接推论. 因为我们后面会反复使用，我们单独将其写为引理.

引理 3.4.3 令 $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$. 对于任意的 $\alpha\in(1,2)$，$\gamma\in\mathbb{R}$ 和 $\beta<0$ 且 $\alpha+\beta>1$，$\alpha+\beta+\gamma>0$ 和 $1+\beta+\gamma<0$，下面估计成立

$$\|[b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda,\phi]f\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3)}\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T,a}(\rho_1)}\|f\|_{\mathbb{C}^{\beta}_{T,a}(\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.$$

证明　注意到

$$\begin{aligned}[b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda,\phi]f&=b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(\phi\succcurlyeq f)+b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(\phi\prec f)-\phi(b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f)\\&=b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(\phi\succcurlyeq f)+b\circ[\nabla_v\mathscr{I}_\lambda,\phi\prec]f+\mathrm{com}(\phi,\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f,b).\end{aligned}$$

基于 (2.40)，(3.38) 和 (2.39)，我们有

$$\begin{aligned}\|b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(\phi\succcurlyeq f)\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3)}&\lesssim\|\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(\phi\succcurlyeq f)\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\beta}_{T,a}(\rho_1\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}\\&\lesssim\|\phi\succcurlyeq f\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\beta-1}_{T,a}(\rho_1\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}\\&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{C}^{\alpha-1}_{T,a}(\rho_1)}\|f\|_{\mathbb{C}^{\beta}_{T,a}(\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.\end{aligned}$$

由 (2.40)，(2.41) 和 (3.41)，可以得到

$$\begin{aligned}\|b\circ[\nabla_v\mathscr{I}_\lambda,\phi\prec]f\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3)}&\lesssim\|[\nabla_v\mathscr{I}_\lambda,\phi\prec]f\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\beta}_{T,a}(\rho_1\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}\\&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{S}^{\alpha-1}_{T}(\rho_1)}\|f\|_{\mathbb{C}^{\beta}_{T,a}(\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.\end{aligned}$$

再由 (2.43)，(3.38) 和 (2.41)，我们得到

$$\begin{aligned}\|\mathrm{com}(\phi,\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f,b)\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\beta+\gamma}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3)}&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{C}^{\alpha-1}_{T,a}(\rho_3)}\|\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}^{1+\beta}_{T,a}(\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_1)}\\&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{C}^{\alpha-1}_{T,a}(\rho_3)}\|f\|_{\mathbb{C}^{\beta}_{T,a}(\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_1)}.\end{aligned}$$

联立上述所有计算，即为所证. □

第四章　噪声的重整化

4.1　可重整化对

在本节中，我们介绍可重整化对的数学定义. 固定 $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 和 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$. 对于任意的 $T > 0$，令 $b = (b_1, \cdots, b_d)$ 和 f 分别为一个 $\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)$ 和 $\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)$ 中的 d 维和 1 维的向量值分布. 我们定义下面的记号方便以后使用：对于任意的 $q \in [1, \infty]$，

$$\mathbb{A}^{b,f}_{T,q}(\rho_1, \rho_2) := \sup_{\lambda \geqslant 0} \|b \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda f\|_{L^q_T \mathbf{C}^{1-2\alpha}_a(\rho_1\rho_2)} + (\|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} + 1)\|f\|_{L^q_T \mathbf{C}^{-\alpha}_a(\rho_2)}. \tag{4.1}$$

由 (2.40)，$b(t) \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda f(t)$ 对于任意的 $\alpha > \frac{1}{2}$ 并不良定，因为基于 Schauder 估计我们只有下面的正则性 (见引理 3.3.1)

$$\nabla_v \mathscr{I}_\lambda f \in \mathbb{C}^{1-\alpha}_{T,a}(\rho_2).$$

然而，在概率的意义下，当 b, f 是某些高斯噪声时 (参看第 4.3 节中的假设和例子)，让 $b \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda f$ 良定是可能的. 这个现象被称为重整化 (参考 [46, 第 5.2 节])，它趋势我们给出下面的关于可重整化对的定义.

定义 4.1.1 我们称上面的 $(b, f) \in \mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1) \times \mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)$ 为一个可重整化对，若存在一个函数序列 $(b_n, f_n) \in L^\infty_T C^\infty_b \times L^\infty_T C^\infty_b$ 满足

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{A}^{b_n, f_n}_{T,\infty}(\rho_1, \rho_2) < \infty \tag{4.2}$$

并且使得

$$\lim_{n \to \infty} \Big(\|b_n - b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} + \|f_n - f\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)} \Big) = 0, \tag{4.3}$$

和对于任意的 $\lambda \geqslant 0$，存在一个分布 $b \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda f \in \mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_2)$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} \|b_n \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda f_n - b \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_2)} = 0. \tag{4.4}$$

记所有的可重整化对的集合为 $\mathbb{B}^\alpha_T(\rho_1, \rho_2)$. 如果对每一个 $i = 1, \cdots, d$，都有 $(b, b_i) \in \mathbb{B}^\alpha_T(\rho_1, \rho_1)$，我们就称 $b \in \mathbb{B}^\alpha_T(\rho_1)$ 是一个可重整向量场.

一个可重整化对 $(b,f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2)$ 的定义中总是包含某个确定的逼近序列 $(b_n,f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. 其中的核心自然是 (4.4) 式的收敛. 一般来说，对于任意的 $(b,f),(b',f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2)$，由于两者定义中选择的逼近序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 可能并不相同，所以下面的线性性并不一定成立

$$(b+b',f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2).$$

即 $\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2)$ 不是一个线性空间. 但是我们有下面的简单结果.

引理 4.1.1 取 $(b,f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2)$ 和 $b'\in\mathbb{C}_{T,a}^\beta(\rho_1)$ 且 $\beta>\alpha-1$，我们有

$$(b+b',f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2).$$

证明 令 $(b_n,f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为可重整化对 $(b,f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2)$ 定义中的逼近序列. 取 φ_n 为一个 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的磨光子并定义 $b_n'(t,\cdot):=b'(t,\cdot)*\varphi_n(\cdot)$. 基于定义易知

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{A}_{T,\infty}^{b_n+b_n',f_n}(\rho_1,\rho_2)\leqslant\sup_{n\in\mathbb{N}}\Big(\mathbb{A}_{T,\infty}^{b_n,f_n}(\rho_1,\rho_2)+\mathbb{A}_{T,\infty}^{b_n',f_n}(\rho_1,\rho_2)\Big)<\infty.$$

对于任意的 $\gamma\in(\alpha-1,\beta)$，由 (2.31) 我们显然有

$$\lim_{n\to\infty}\|b_n'-b'\|_{\mathbb{C}_{T,a}^\gamma(\rho_1)}=0,$$

并且由 (2.40) 和 (4.3)，我们有

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\|b_n'\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f_n-b'\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}_{T,a}^0(\rho_1\rho_2)}\\&\quad\leqslant\lim_{n\to\infty}\|b_n'\|_{\mathbb{C}_{T,a}^\gamma(\rho_1)}\|\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(f_n-f)\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{1-\alpha}(\rho_2)}\\&\qquad+\lim_{n\to\infty}\|b_n'-b'\|_{\mathbb{C}_{T,a}^\gamma(\rho_1)}\|\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{1-\alpha}(\rho_2)}=0.\end{aligned}$$

即为所证. □

对了记号上的方便我们后面总是会通过取 $\lambda=0$ 来去掉 (4.1) 中的参数 λ. 为了不失一般性，我们给出下面的引理，其证明参见 [114, 引理 2.16].

引理 4.1.2 令 $\mathscr{I}_s^t(f)=\int_s^t P_{t-r}f(r)\mathrm{d}r$. 对于任意的 $t>0$，我们有

$$\sup_{\lambda\geqslant0}\|b(t)\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f(t)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}(\rho)}\leqslant2\sup_{s\in[0,t]}\|b(t)\circ\nabla_v\mathscr{I}_s^t(f)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}(\rho)}.\tag{4.5}$$

下面有关共振算子 $\circ$ 的局部化性质在后面有关权重的分析中十分关键且有用.

引理 4.1.3 令 $T>0$，$\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4\in\mathscr{P}_{\rm w}$，$\alpha\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ 和 $\gamma\in(\alpha,1)$. 假设

$$(b,f)\in\mathbb{B}^{\alpha}_T(\rho_1,\rho_2),\ \psi\in\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3),\ \phi\in\mathbb{S}^{\gamma}_{T,a}(\rho_4).$$

则 $(b\psi,f\phi)\in\mathbb{B}^{\alpha}_T(\rho_1\rho_3,\rho_2\rho_4)$ 且其逼近序列为 $(b_n\psi,f_n\phi)$. 此外存在一个只依赖 T,γ,α,d,ρ_i 的常数 $C>0$ 使得对于所有的 $\lambda\geqslant 0$,

$$\begin{aligned}&\|(b\psi)\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(f\phi)-\psi\phi(b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f)\|_{\mathbb{C}^{1+\gamma-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)}\\&\quad\lesssim_C\|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)}\|f\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)}\|\psi\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}\|\phi\|_{\mathbb{S}^{\gamma}_{T,a}(\rho_4)}.\end{aligned}\tag{4.6}$$

证明 基于可重整化对的定义，我们只需要证明先验估计 (4.6). 首先注意到

$$\begin{aligned}I&:=(b\psi)\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(f\phi)-\psi\phi(b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f)\\&=[(b\psi)\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda,\phi]f+\phi[\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f\circ,\psi]b=:I_1+I_2.\end{aligned}$$

对于 I_1，因为 $1+\gamma-2\alpha>0$，$1-2\alpha<0$ 和$\gamma+1-\alpha>1$，所以基于引理 3.4.3，我们有

$$\begin{aligned}\|I_1\|_{\mathbb{C}^{1+\gamma-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)}&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{S}^{\gamma}_{T,a}(\rho_4)}\|f\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)}\|b\psi\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_3)}\\&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{S}^{\gamma}_{T,a}(\rho_4)}\|f\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)}\|\psi\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.\end{aligned}$$

对于 I_2 项，类似地，由 (2.44)，我们有

$$\begin{aligned}\|I_2\|_{\mathbb{C}^{1+\gamma-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3\rho_4)}&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_4)}\|[\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f\circ,\psi]b\|_{\mathbb{C}^{1+\gamma-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_2\rho_3)}\\&\lesssim\|\phi\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_4)}\|\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}^{1-\alpha}_{T,a}(\rho_2)}\|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)}\|\psi\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.\end{aligned}$$

因此，基于 (3.39) 我们得到了 (4.6). 证毕. □

4.2 高斯噪声的谱测度刻画

令 μ 为一个 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的对称缓增测度，即 $\mu(\mathrm{d}\xi)=\mu(-\mathrm{d}\xi)$ 且对于某个 $l\in\mathbb{N}$ 有

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}(1+|\xi|)^{-l}\mu(\mathrm{d}\xi)<\infty.\tag{4.7}$$

令 $L^2_{\mathbb{C}}(\mu)$ 为被赋予下面内积的复值 Hilbert 空间

$$\langle f,g\rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(\mu)}:=\int_{\mathbb{R}^{2d}}f(\zeta)\,\overline{g(\zeta)}\mu(\mathrm{d}\zeta)<\infty.$$

接着令 $\mathbb{H}$ 为基于如下内积在 $\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ 中完备化的 Hilbert 空间

$$\langle f, g\rangle_{\mathbb{H}} := \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2_{\mathbb{C}}(\mu)}.$$

定义 4.2.1 令 X 为一个 $\mathbb{H}$ 上的高斯场，即 X 是一个从 $\mathbb{H}$ 到 $L^2(\Omega, \mathbf{P})$ 的连续线性映射，且对于任意的 $f \in \mathbb{H}$，$X(f)$ 是一个实值的零均值，方差为 $\|f\|^2_{\mathbb{H}}$ 的高斯随机变量. 特别地，对于任意的 $f, g \in \mathbb{H}$

$$\mathbf{E}\big(X(f)X(g)\big) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{f}(\zeta)\,\hat{g}(-\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta). \tag{4.8}$$

这时我们称 X 是一个谱测度为 μ 的高斯噪声 (参见 [100]).

注意到 [91, 性质 1.3，第 16 页] 可以保证该高斯场的存在性.

取 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ 为一个对称函数，即 $\varphi(z) = \varphi(-z)$，$\forall z \in \mathbb{R}^{2d}$，并定义

$$X_\varphi(z) := X(\varphi(z - \cdot)).$$

这时我们有下面的估计.

引理 4.2.1 对于任意的 $p \geqslant 2$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们有

$$\sup_{z\in\mathbb{R}^{2d}} \mathbf{E}|\nabla^k X_\varphi(z)|^p < \infty.$$

特别地，$z \mapsto X_\varphi(z)$ 有一个光滑版本.

证明 因为 X 是一个从 $\mathbb{H}$ 到 $L^2(\Omega)$ 的有界线性算子，所以我们有

$$\nabla^k X_\varphi(z) = X(\nabla^k \varphi(z - \cdot)), \quad a.s.$$

基于高斯随机变量的超压缩性 (参考 [100, 第 5 页, (1.1)]) 和 (4.8)，我们有

$$\mathbf{E}|\nabla^k X_\varphi(z)|^p \lesssim (\mathbf{E}|\nabla^k X_\varphi(z)|^2)^{p/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\widehat{\nabla^k \varphi}(\zeta)|^2 \mu(\mathrm{d}\zeta)\right)^{p/2}. \tag{4.9}$$

基于 $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ 并联立 (4.7)可得上式中的积分是有限的. 即为所证. $\square$

令 $\varphi, \varphi' \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$ 为两个对称函数. 对于任意的 $H \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4d})$，我们定义

$$(X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z, z') X_\varphi(z) X_{\varphi'}(z') \mathrm{d}z\mathrm{d}z'. \tag{4.10}$$

下面的结果可以由高斯场的性质标准地得到 (参考 [100]). 为了读者的方便，我们会给出详细的证明.

引理 4.2.2 对于任意的 $H \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{4d})$，下式成立

$$\mathbf{E}\Big((X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H)\Big) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{H}(\zeta, -\zeta)\hat{\varphi}(\zeta)\hat{\varphi}'(\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta), \tag{4.11}$$

且

$$\mathrm{Var}\Big((X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H)\Big) = 2\int_{\mathbb{R}^{4d}} |(\mathrm{Sym}\,\hat{H}_{\varphi,\varphi'})(\zeta, \zeta')|^2 \mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta'), \tag{4.12}$$

其中 $\hat{H}_{\varphi,\varphi'}(\zeta, \zeta') := \hat{H}(\zeta, \zeta')\hat{\varphi}(\zeta)\hat{\varphi}'(\zeta')$ 和

$$(\mathrm{Sym}\hat{H}_{\varphi,\varphi'})(\zeta, \zeta') := (\hat{H}_{\varphi,\varphi'}(\zeta, \zeta') + \hat{H}_{\varphi,\varphi'}(\zeta', \zeta))/2. \tag{4.13}$$

证明 首先由 (4.8) 可得

$$\mathbf{E}\Big(X_\varphi(z)X_{\varphi'}(z')\Big) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta(z'-z)}\hat{\varphi}(\zeta)\hat{\varphi}'(\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta) =: I_{\varphi,\varphi'}(z, z'). \tag{4.14}$$

再基于 (4.10) 和 Fubini 定理，我们有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big((X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H)\Big) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z, z')I_{\varphi,\varphi'}(z, z')\mathrm{d}z\mathrm{d}z' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat{H}(\zeta, -\zeta)\hat{\varphi}(\zeta)\hat{\varphi}'(\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta).\end{aligned} \tag{4.15}$$

接下来我们考虑 (4.12). 我们注意到下面的关于高斯随机变量的运算公式 (参考 [100, 定理 1.28]) $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$,

$$\mathbf{E}(\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4) = \mathbf{E}(\xi_1\xi_2)\mathbf{E}(\xi_3\xi_4) + \mathbf{E}(\xi_1\xi_3)\mathbf{E}(\xi_2\xi_4) + \mathbf{E}(\xi_1\xi_4)\mathbf{E}(\xi_2\xi_3),$$

这时再次基于 Fubini 定理和 (4.14)，我们有

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}\Big((X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H)\Big)^2 = \mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z, z')X_\varphi(z)X_{\varphi'}(z')\mathrm{d}z\mathrm{d}z'\right)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z, z')H(\bar{z}, \bar{z}')\mathbf{E}\Big(X_\varphi(z)X_{\varphi'}(z')X_\varphi(\bar{z})X_{\varphi'}(\bar{z}')\Big)\mathrm{d}z\mathrm{d}z'\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}\bar{z}' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z, z')H(\bar{z}, \bar{z}')\Big(I_{\varphi,\varphi'}(z, z')I_{\varphi,\varphi'}(\bar{z}, \bar{z}') \\ &\quad + I_{\varphi,\varphi}(z, \bar{z})I_{\varphi',\varphi'}(z', \bar{z}') + I_{\varphi,\varphi'}(z, \bar{z}')I_{\varphi,\varphi'}(\bar{z}, z')\Big)\mathrm{d}z\mathrm{d}z'\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}\bar{z}'.\end{aligned}$$

因此，由 (4.15) 可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{Var}\Big((X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H)\Big) = \mathbf{E}\Big((X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H)\Big)^2 - \Big(\mathbf{E}\big((X_\varphi \otimes X_{\varphi'})(H)\big)\Big)^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2d}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z, z')H(\bar{z}, \bar{z}')I_{\varphi,\varphi}(z, \bar{z})I_{\varphi',\varphi'}(z', \bar{z}')\mathrm{d}z\mathrm{d}z'\mathrm{d}\bar{z}\mathrm{d}\bar{z}'\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_{\mathbb{R}^{2d}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z,z')H(\bar z,\bar z')I_{\varphi,\varphi'}(z,\bar z')I_{\varphi,\varphi'}(\bar z,z')\mathrm{d}z\mathrm{d}z'\mathrm{d}\bar z\mathrm{d}\bar z'\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat H(\zeta,\zeta')\hat H(-\zeta,-\zeta')|\hat\varphi(\zeta)|^2|\hat\varphi'(\zeta')|^2\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta')\\
&+\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat H(\zeta,-\zeta')\hat H(\zeta',-\zeta)\hat\varphi(\zeta)\hat\varphi(\zeta')\hat\varphi'(\zeta)\hat\varphi'(\zeta')\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta')\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat H(\zeta,\zeta')\overline{\hat H(\zeta,\zeta')}|\hat\varphi(\zeta)|^2|\hat\varphi'(\zeta')|^2\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta')\\
&+\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \hat H(\zeta,\zeta')\overline{\hat H(\zeta',\zeta)}\hat\varphi(\zeta)\hat\varphi(\zeta')\hat\varphi'(\zeta)\hat\varphi'(\zeta')\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta'),
\end{aligned}
$$

其中最后一步来自于 $\hat\varphi$, $\hat\varphi'$ 和 μ 的对称性. 到此我们得到 (4.12) ，即为所证. □

如果我们考虑 $(X_\varphi\otimes X_{\varphi'})(H)$ 的 Wiener 混沌分解 (see [81, Ch.1]), 这时其 0 阶 Wiener 混沌项为 $I_0:=\mathbf{E}\Big((X_\varphi\otimes X_{\varphi'})(H)\Big)$，2 阶 Wiener 混沌项为 $I_2:=(X_\varphi\otimes X_{\varphi'})(H)-\mathbf{E}\Big((X_\varphi\otimes X_{\varphi'})(H)\Big)$.

注 4.2.1 假设 X,Y 是两个拥有相同普测度 μ 的独立的高斯场，则

$$\mathbf{E}((X_\varphi\otimes Y_{\varphi'})(H))=0$$

且这时二阶矩等于方差以及

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\big((X_\varphi\otimes Y_{\varphi'})(H)\big)^2&=\mathbf{E}\left(\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z,z')X_\varphi(z)Y_{\varphi'}(z')\mathrm{d}z\mathrm{d}z'\right)^2\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\cdots\int_{\mathbb{R}^{2d}} H(z,z')H(\bar z,\bar z')I_{\varphi,\varphi}(z,\bar z)I_{\varphi',\varphi'}(z',\bar z')\mathrm{d}z\mathrm{d}z'\mathrm{d}\bar z\mathrm{d}\bar z'\\
&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\hat H(\zeta,\zeta')|^2|\hat\varphi(\zeta)|^2|\hat\varphi'(\zeta')|^2\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta'). \qquad (4.16)
\end{aligned}
$$

4.3 主要定理及例子 – 可重整化对的存在性分析

在本节，我们首先给出本章的主要定理:

定理 4.3.1 假设 μ 是一个 Radon 测度且满足

$$\mu(\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}\eta)=\mu(\mathrm{d}\xi,-\mathrm{d}\eta)=\mu(-\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}\eta), \qquad (S)$$

并且对于某个 $\beta\in(\frac12,\frac23)$,

$$\sup_{\zeta'\in\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\frac{\mu(\mathrm{d}\zeta)}{(1+|\zeta'+\zeta|_a)^{2\beta}}<\infty. \qquad (A^\beta)$$

令 $W=(X_1,\cdots,X_d)$ 为一个 d 维各分量相互独立的高斯噪声，其每个分量都拥有共同的谱测定 μ. 则对于任意的 $\kappa>0$ 和 $\alpha>\beta$，我们有

$$\mathbf{P}\big\{\omega:W(\cdot,\omega)\in\mathbb{B}^\alpha_T(\varrho^\kappa)\big\}=1.$$

注 4.3.1 (i) 注意到条件 (A^β) 蕴含了下面事实：对于任意的 $\sigma,\gamma\geqslant 0$ 满足 $\sigma+\gamma=2\beta$，

$$\sup_{\zeta'\in\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\frac{\mu(\mathrm{d}\zeta)}{(1+|\zeta'+\zeta|_a)^\sigma(1+|\zeta|_a)^\gamma}<\infty. \tag{4.17}$$

实际上，该事实基于下面的观察:

$$\begin{aligned}&\left(\int_{|\zeta|_a>|\zeta'+\zeta|_a}+\int_{|\zeta|_a\leqslant|\zeta'+\zeta|_a}\right)\frac{\mu(\mathrm{d}\zeta)}{(1+|\zeta'+\zeta|_a)^\sigma(1+|\zeta|_a)^\gamma}\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^{2d}}\frac{\mu(\mathrm{d}\zeta)}{(1+|\zeta'+\zeta|_a)^{2\beta}}+\int_{\mathbb{R}^{2d}}\frac{\mu(\mathrm{d}\zeta)}{(1+|\zeta|_a)^{2\beta}}.\end{aligned}$$

(ii) μ 关于第二个变量 η 的对称性假设使得我们可以在下面的收敛结果 (4.37) 中使用一些消去性质 (消去的项为 (4.36)). 在经典的热方程框架下，由于对称性，0 阶 Wiener 混沌项直接为 0. 然而, 在我们动理学的框架下该项并不为 0，但幸运的是其在某些带权的 Besov 空间中收敛 (见下面的 (4.33)).

4.3.1 满足条件 (A^β) 的一些例子

在本节的余下部分中，我们会给出一些满足条件 (A^β) 的缓增测度的例子来阐明我们上面定理的合理性. 首先我们给出下面初等的引理.

引理 4.3.1 给定任意的 $\beta_1,\beta_2\in[0,d)$ 和 $\gamma_1,\gamma_2\geqslant 0$ 满足

$$\gamma_1+\beta_1>d,\quad 3\beta_1+\beta_2+\gamma_2>4d,$$

这时下式成立

$$\sup_{\xi'\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{\beta_1}(1+|\xi+\xi'|)^{\gamma_1}}<\infty, \tag{4.18}$$

且对于任意的 $\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}$，

$$\sup_{\zeta'\in\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{|\xi|^{\beta_1}|\eta|^{\beta_2}(1+|\zeta+\zeta'|_a)^{\gamma_2}}<\infty. \tag{4.19}$$

证明 对于 (4.18)，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{\beta_1}(1+|\xi+\xi'|)^{\gamma_1}}=\left(\int_{|\xi+\xi'|\leqslant|\xi|}+\int_{|\xi+\xi'|>|\xi|}\right)\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{\beta_1}(1+|\xi+\xi'|)^{\gamma_1}}\\&\leqslant\int_{|\xi+\xi'|\leqslant|\xi|}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi+\xi'|^{\beta_1}(1+|\xi+\xi'|)^{\gamma_1}}+\int_{|\xi+\xi'|>|\xi|}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{\beta_1}(1+|\xi|)^{\gamma_1}}\\&\leqslant\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi+\xi'|^{\beta_1}(1+|\xi+\xi'|)^{\gamma_1}}+\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{\beta_1}(1+|\xi|)^{\gamma_1}}=2\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{\beta_1}(1+|\xi|)^{\gamma_1}}.\end{aligned}$$

基于 $\gamma_1+\beta_1>d$ 和 $\beta_1<d$，上式右侧是有限的.

接下来我们用 (4.18) 来证明 (4.19). 令

$$\theta:=\frac{3(d-\beta_1)}{3(d-\beta_1)+(d-\beta_2)}=\frac{3(d-\beta_1)}{4d-3\beta_1-\beta_2}\in(0,1).$$

因为 $\gamma_2>4d-3\beta_1-\beta_2$,，所以我们有

$$\beta_1+\theta\gamma_2/3>d,\quad \beta_2+(1-\theta)\gamma_2>d. \tag{4.20}$$

由 $|\xi|^{1/3}\vee|\eta|\leqslant|\zeta|_a$，我们接着有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\frac{\mathrm{d}\zeta}{|\xi|^{\beta_1}|\eta|^{\beta_2}(1+|\zeta+\zeta'|_a)^{\gamma_2}}\leqslant&\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^{\beta_1}(1+|\xi+\xi'|^{1/3})^{\theta\gamma_2}}\\&\times\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\mathrm{d}\eta}{|\eta|^{\beta_2}(1+|\eta+\eta'|)^{(1-\theta)\gamma_2}},\end{aligned}$$

继而通过 (4.20) 和 (4.18) 得到 (4.19). 证毕. □

例 4.3.1 固定 $\beta\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ 和 $\gamma\in(d-\frac{2}{3}\beta,d)$. 令

$$\mu(\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}\eta)=|\xi|^{-\gamma}\mathrm{d}\xi\delta_0(\mathrm{d}\eta),$$

其中 $\mathrm{d}\xi$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebsgue 测度且 $\delta_0(\mathrm{d}\eta)$ 是 $\mathbb{R}^d$ 上的集中在 0 点的 Dirac 测度. 由 (4.18)可得 (A^β) 成立. 这时, 众所周知的是对于某个常数 $c_{d,\gamma}>0$ (见 [99, 第 117 页, 引理 2]),

$$\hat{\mu}(z)=\hat{\mu}(x,v)=c_{d,\gamma}|x|^{\gamma-d},\quad z=(x,v).$$

特别地，对于任意的 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$，

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\Big(X(f)X(g)\Big)&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\hat{f}(\zeta)\hat{g}(-\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta)=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}f(z)g(z')\hat{\mu}(z-z')\mathrm{d}z'\mathrm{d}z\\&=\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x,v)\mathrm{d}v\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}g(x',v)\mathrm{d}v\right)\frac{c_{d,\gamma}\mathrm{d}x\mathrm{d}x'}{|x-x'|^{d-\gamma}}.\end{aligned}$$

固定 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$ 满足 $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi=1$. 对于任意的 $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，若我们定义

$$X_1(f):=X(\widetilde{f}),\quad \widetilde{f}(x,v):=f(x)\varphi(v),$$

则对于任意的 $f,g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，

$$\mathbf{E}\Big(X_1(f)X_1(g)\Big)=c_{d,\gamma}\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)g(x')\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}x'}{|x-x'|^{d-\gamma}}=\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(\xi)\hat{g}(-\xi)\frac{\mathrm{d}\xi}{|\xi|^\gamma},$$

其中右侧是其次 Bessel 位势空间 $\dot{\mathbb{H}}^{-\gamma}(\mathbb{R}^d)$ 中的内积 (见 [3]). 特别地，$X_1(f)$ 的定义可以由此延拓到所有的 $f\in\dot{\mathbb{H}}^{-\gamma}(\mathbb{R}^d)$. 这时对应的噪声 X_1 是与速度变量 v 无关的. 取 $d=1$ 并且定义

$$B_\gamma(y):=\Big(X_1(\mathbb{1}_{[0,y]})\mathbb{1}_{y\geqslant 0}-X_1(\mathbb{1}_{[y,0]})\mathbb{1}_{y<0}\Big)\gamma^{1/2}(1+\gamma)^{1/2}(2c_{d,\gamma})^{-1/2}.$$

经过初等的计算后我们发现

$$\mathbf{E}\Big(B_\gamma(y)B_\gamma(y')\Big)=\tfrac{1}{2}(|y|^{1+\gamma}+|y'|^{1+\gamma}-|y-y'|^{1+\gamma}).$$

因此，$B_\gamma(y)$ 是一个带有 Hurst 参数 $H=\frac{1+\gamma}{2}\in(1-\frac{\beta}{3},1)$ 的分数阶布朗运动，且对于任意的 $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$,

$$X_1(g)=-\bar{c}_{d,\gamma}\int_{\mathbb{R}}g'(y)B_\gamma(y)\mathrm{d}y.$$

换句话说，$X_1=\bar{c}_{d,\gamma}B'_\gamma$ 在广义函数的意义下成立.

例 4.3.2 对于 $\beta\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ 和 $0\leqslant\gamma\in(d-2\beta,d)$，令

$$\mu(\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}\eta)=|\eta|^{-\gamma}\delta_0(\mathrm{d}\xi)\mathrm{d}\eta.$$

由 (4.18) 可得 (A^β) 成立. 当 $d=1$ 且 $\gamma=0$ 时，我们有

$$\hat{\mu}(x,v)=\delta_0(\mathrm{d}v)$$

和

$$\mathbf{E}\Big(X(f)X(g)\Big)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d}f(x,v)\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}^d}g(y,v)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}v.$$

特别地，对于满足 $\int_{\mathbb{R}^d}\varphi=1$ 的 $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^d)$，若我们定义

$$X_2(f):=X(\widetilde{f}),\quad \widetilde{f}(x,v):=\varphi(x)f(v)$$

则X_2 与 x 变量无关且是 $\mathbb{R}$ 上的白噪声. 基于类似例 4.3.1 中的分析，对于任意的 $\gamma\in[0,1)$, X_2 可以视为 Hurst 参数 $H=\frac{1+\gamma}{2}\in[\frac{1}{2},1)$ 的分数阶布朗运动的广义倒数.

例 4.3.3 对于满足 $3\gamma_1+\gamma_2>4d-2\beta$ 的 $\beta\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ 和 $\gamma_1,\gamma_2\in[0,d)$，令

$$\mu(\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}\eta)=|\xi|^{-\gamma_1}|\eta|^{-\gamma_2}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,$$

由 (4.19) 可得 (A^β) 成立. 当 $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$ 时，我们有

$$\hat{\mu}(x,v) = c_{d,\gamma}|x|^{\gamma_1-d}|v|^{\gamma_2-d}.$$

当 $\gamma_2 = 0$ 时，因为 $\beta \in (\frac{1}{2},\frac{2}{3})$，我们有

$$(4d-2\beta)/3 < \gamma_1 < d \Rightarrow d < 2\beta \Rightarrow d = 1,$$

和

$$\mathbf{E}\Big(X(f)X(g)\Big) = c_{1,\gamma}\int_{\mathbb{R}^3} f(x,v)g(y,v)\frac{\mathrm{d}v\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{|x-y|^{\gamma_1-1}}.$$

特别地，我们可以把 W 看作为 v-方向的白噪声，且 x-方向的有色噪声. 同上面的例子，这时 W 是一个满足 $3H_1 + H_2 > 4-\beta$ 的参数 $H_i = \frac{\gamma_i+1}{2}$ 的分数布朗 sheet 的广义导数.

4.4 主要定理的证明

在本节中，我们会给出定理 4.3.1 的证明. 为此，我们先介绍下面的记号. 我们引入 (2.7) 中定义的光滑函数族 $(\phi_j^a)_{j\geqslant -1}$. 我们总可以假设 ϕ_{-1}^a 满足下面的对称性

$$\phi_{-1}^a(\xi,-\eta) = \phi_{-1}^a(\xi,\eta), \quad (\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}.$$

我们定义下面的函数供后面使用：

$$\psi(\zeta,\zeta') := \sum_{|i-j|\leqslant 1}\phi_i^a(\zeta)\phi_j^a(\zeta'), \quad \zeta,\zeta'\in\mathbb{R}^{2d}. \tag{4.21}$$

特别地，基于 ϕ_{-1}^a 关于 η 的对称性，对于任意的 $\zeta = (\xi,\eta), \zeta' = (\xi',\eta')\in\mathbb{R}^{2d}$,

$$\psi((\xi,\eta),(\xi',\eta')) = \psi((\xi,-\eta),(\xi',\eta')) = \psi((\xi,\eta),(\xi',-\eta')). \tag{4.22}$$

现在我们回顾一些之前用过的记号. 令 $z = (x,v)\in\mathbb{R}^{2d}$ 和 $\zeta = (\xi,\eta)$. 对于任意的$t\in\mathbb{R}$，我们定义

$$\Gamma_t z := (x+tv, v), \quad \hat{\Gamma}_t\zeta := (\xi, \eta+t\xi),$$

且对于一个 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的可测函数 f 和 $y,z\in\mathbb{R}^{2d}$，定义

$$(\Gamma_t f)(z) := f(\Gamma_t z), \quad (\tau_y f)(z) := f(z-y).$$

显然，

$$\Gamma_t\Gamma_{-t}z = z,\ \ \langle\Gamma_t z,\zeta\rangle = \langle z,\hat{\Gamma}_t\zeta\rangle,$$

且

$$(f*g)(z) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \tau_y f(z)g(y)\mathrm{d}y \tag{4.23}$$

和下式成立

$$\widehat{\Gamma_t f}(\zeta) = \hat{\Gamma}_{-t}\hat{f}(\zeta),\ \ \Gamma_t(f*g) = (\Gamma_t f)*(\Gamma_t g).$$

由 (3.2)，存在一个常数 $c_0 > 0$ 使得对于所有的 $(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}$，

$$\hat{p}_s(\xi,\eta) = \mathrm{e}^{-s|\eta|^2 - s^3|\xi|^2/3 - s^2\langle\xi,\eta\rangle} \leqslant \mathrm{e}^{-c_0(s^3|\xi|^2 + s|\eta|^2)}. \tag{4.24}$$

现在令 φ 为一个具有紧支撑的概率分布密度函数且其关于变量 v 对称. 对于 $\varepsilon\in(0,1)$，令

$$\varphi_\varepsilon(z) := \varepsilon^{-2d}\varphi(z/\varepsilon),\ \ X_\varepsilon(z) := X_{\varphi_\varepsilon}(z) = X(\varphi_\varepsilon(z-\cdot)).$$

接下来我们给出两个后面需要用到的技巧性结果.

引理 4.4.1 (i) 对于任意的 $\gamma\in\mathbb{R}$，存在一个 $C>0$ 使得

$$|\phi_j^a(\zeta)| \lesssim_C 1\wedge\left(2^{\gamma j}(1+|\zeta|_a)^{-\gamma}\right),\ \ j\geqslant -1,\ \ \zeta\in\mathbb{R}^{2d}, \tag{4.25}$$

且

$$|\psi(\zeta,\zeta')| \lesssim_C 1\wedge\left((1+|\zeta|_a)^{-\gamma}(1+|\zeta'|_a)^{\gamma}\right),\ \ \zeta,\zeta'\in\mathbb{R}^{2d}. \tag{4.26}$$

(ii) 对于任意的 $\gamma\in[0,1]$，存在一个常数 $C>0$ 使得

$$|\psi(\zeta,\zeta') - \psi(\zeta,\zeta)| \lesssim_C |\zeta-\zeta'|_a^\gamma(1+|\zeta|_a)^{-\gamma},\ \ \zeta,\zeta'\in\mathbb{R}^{2d}. \tag{4.27}$$

证明 (i) 注意到

$$K_j := \mathrm{supp}\phi_j^a \subset \{\zeta : 2^{j-1}\leqslant|\zeta|_a\leqslant 2^{j+1}\},\ \ j\geqslant 0.$$

对于任意的 $\gamma\in\mathbb{R}$，因为下式对所有的 $j\geqslant 0$ 成立

$$(1+|\zeta|_a)^\gamma \mathbb{1}_{K_j} \lesssim 2^{j\gamma},\ \ (1+|\zeta|_a)^\gamma \mathbb{1}_{\{|\zeta|_a\leqslant 1\}} \lesssim 1,$$

所以

$$|\phi_j^a(\zeta)| \leqslant \frac{(1+|\zeta|_a)^\gamma}{(1+|\zeta|_a)^\gamma}\mathbb{1}_{K_j}(\zeta) \lesssim \frac{2^{\gamma j}}{(1+|\zeta|_a)^\gamma},$$

且

$$|\psi(\zeta,\zeta')|\leqslant\sum_{|i-j|\leqslant 1}|\phi_i^a(\zeta)||\phi_j^a(\zeta')|\lesssim\sum_{|i-j|\leqslant 1}\frac{2^{\gamma i}\mathbb{1}_{K_i}(\zeta)}{(1+|\zeta|_a)^\gamma}\frac{(1+|\zeta'|_a)^\gamma}{2^{\gamma j}}$$
$$\lesssim\sum_{i\geqslant -1}\mathbb{1}_{K_i}(\zeta)\frac{(1+|\zeta'|_a)^\gamma}{(1+|\zeta|_a)^\gamma}\lesssim\frac{(1+|\zeta'|_a)^\gamma}{(1+|\zeta|_a)^\gamma}.$$

(ii) 令 $\gamma\in[0,1]$. 对任意的 $j\geqslant 0$，我们有

$$|\phi_j^a(\zeta)-\phi_j^a(\zeta')|=|\phi_0^a(2^{-aj}\zeta)-\phi_0^a(2^{-aj}\zeta')|\lesssim|\zeta-\zeta'|_a^\gamma 2^{-j\gamma}\|\phi_0^a\|_{\mathbf{C}_a^\gamma}$$

和

$$|\phi_{-1}^a(\zeta)-\phi_{-1}^a(\zeta')|\lesssim|\zeta-\zeta'|_a^\gamma\|\phi_{-1}^a\|_{\mathbf{C}_a^\gamma}.$$

因此，由 (4.25) 可得

$$|\psi(\zeta,\zeta')-\psi(\zeta,\zeta)|\lesssim|\zeta-\zeta'|_a^\gamma\sum_{j\geqslant -1}2^{-j\gamma}\phi_j^a(\zeta)\lesssim\frac{|\zeta-\zeta'|_a^\gamma}{(1+|\zeta|_a)^\gamma}\sum_{j\geqslant -1}\mathbb{1}_{K_j}(\zeta).$$

证毕. □

引理 4.4.2 对于任意的 $T,\lambda>0$，$\theta\in[0,1]$ 和 $\gamma>0$，存在一个常数 $C=C(T,\gamma,\theta,\lambda)$ 使得对于所有的 $0\leqslant s<t\leqslant T$ 和 $\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}$，

$$\int_s^t r^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\lambda(r^3|\xi|^2+r|\eta|^2)}\mathrm{d}r\lesssim_C|t-s|^{(\gamma\wedge 1)(1-\theta)}(1+|\zeta|_a)^{-2\theta\gamma}. \tag{4.28}$$

证明 注意到

$$\int_0^t s^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\lambda s^3|\xi|^2}\mathrm{d}s\lesssim|\xi|^{-\frac{2\gamma}{3}},\quad\int_0^t s^{\gamma-1}\mathrm{e}^{-\lambda s|\eta|^2}\mathrm{d}s\lesssim|\eta|^{-2\gamma},$$

和

$$\int_s^t r^{\gamma-1}\mathrm{d}r=(t^\gamma-s^\gamma)/\gamma\lesssim(t-s)^{\gamma\wedge 1}.$$

令 $g(r,\zeta):=\mathrm{e}^{-\lambda(r^3|\xi|^2+r|\eta|^2)}$. 对于任意的 $\theta\in[0,1]$，我们有

$$\int_s^t r^{\gamma-1}g(r,\zeta)\mathrm{d}r=\left(\int_s^t r^{\gamma-1}g(r,\zeta)\mathrm{d}r\right)^{1-\theta}\left(\int_s^t r^{\gamma-1}g(r,\zeta)\mathrm{d}r\right)^{\theta}$$
$$\leqslant\left(\int_s^t r^{\gamma-1}\mathrm{d}r\right)^{1-\theta}\left(\int_0^t s^{\gamma-1}g(s,\zeta)\mathrm{d}s\right)^{\theta}$$
$$\lesssim(t-s)^{(\gamma\wedge 1)(1-\theta)}\left(1\wedge|\xi|^{-\frac{2\gamma}{3}}\wedge|\eta|^{-2\gamma}\right)^{\theta},$$

继而基于 $1\vee|\xi|^{1/3}\vee|\eta|\asymp 1+|\zeta|_a$ 可得 (4.28). 证毕. □

通过前面的准备工作，现在我们可以给出

证明 (定理 4.3.1 **的证明)** 由可重整化对的定义可知，只需证明

$$X \in \mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho^\kappa),\ \mathbf{P}-a.s.$$

和下面的仿积可以由 Cauchy 列逼近定义

$$X \circ \nabla_v \mathscr{I} X \in C([0,T], \mathbf{C}_a^{1-2\alpha}(\rho^\kappa)),\quad \mathbf{P}-a.s.$$

接下来我们分别对这两个给出证明

(i) X **的带权各向异性 Besov 范数估计**. 与 (4.9) 中的估计类似，由高斯随机变量的强压缩性可知对于任意的 $\bar{\alpha} \in (\beta, \beta+1)$，有

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}|\mathcal{R}_j^a X_\varepsilon(z) - \mathcal{R}_j^a X(z)|^p &\lesssim \left(\mathbf{E}|\mathcal{R}_j^a X_\varepsilon(z) - \mathcal{R}_j^a X(z)|^2\right)^{p/2} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} |\phi_j^a(\zeta)|^2 |\hat{\varphi}_\varepsilon(\zeta)-1|^2 \mu(\mathrm{d}\zeta)\right)^{p/2} \\
&\overset{(4.25)}{\lesssim} 2^{\bar{\alpha}pj} \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{|\hat{\varphi}_\varepsilon(\zeta)-1|^2}{(1+|\zeta|_a)^{2\bar{\alpha}}} \mu(\mathrm{d}\zeta)\right)^{p/2},
\end{aligned}$$

其中不等式中的常数不依赖于 z. 注意到

$$|\hat{\varphi}_\varepsilon(\zeta)-1| = |\hat{\varphi}(\varepsilon\zeta)-1| \lesssim \varepsilon^{(\bar{\alpha}-\beta)/3} |\zeta|_a^{\bar{\alpha}-\beta},$$

则基于定义，我们有对于任意的 $\alpha' > \bar{\alpha}$ 和 $p > 4d/\kappa$,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\|X_\varepsilon - X\|^p_{\mathbf{B}_{p,p}^{-\alpha',a}(\varrho^\kappa)} &= \sum_j 2^{-\alpha' pj} \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbf{E}|\mathcal{R}_j^a X_\varepsilon(z) - \mathcal{R}_j^a X(z)|^p |\varrho^\kappa(z)|^p \mathrm{d}z \\
&\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{\varepsilon^{2(\bar{\alpha}-\beta)/3}}{(1+|\zeta|_a)^{2\beta}} \mu(\mathrm{d}\zeta)\right)^{p/2} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |\varrho^\kappa(z)|^p \mathrm{d}z, \qquad (4.29)
\end{aligned}$$

继而由 (A^β) 可知上式随着 $\varepsilon \to 0$ 而收敛到 0. 进一步地，对于任意的 $\alpha > \bar{\alpha}$，由 Besov 空间的嵌入定理，定理 2.1.1，可得对于足够大的 p，我们有

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\|X_\varepsilon - X\|^p_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\varrho^\kappa)} = 0.$$

(ii) $X \circ \nabla_v \mathscr{I} X$ **的良定性.** 因为 X 于时间 t 无关，从而根据引理 4.1.2 我们只需要证明

$$\mathbf{E} \sup_{0\leqslant s<t\leqslant T} \|X \circ \nabla_v \mathscr{I} X(t) - X \circ \nabla_v \mathscr{I} X(s)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}(\varrho^\kappa)} < \infty.$$

我们在下面的引理中证明 $\mathcal{R}_\ell^a(X_\varepsilon \circ \nabla_v \mathscr{I} X_\varepsilon(t))$ 可以表示为 $(X_\varepsilon \otimes X_\varepsilon)(H_t^\ell)$ 的形式.

引理 4.4.3 对于任意的 $t\geqslant 0$ 和 $\ell\geqslant -1$，我们有，

$$\mathcal{R}^a_\ell(X_\varepsilon\circ\nabla_v\mathscr{I}X_\varepsilon(t))=(X_\varepsilon\otimes X_\varepsilon)(H^\ell_t),\tag{4.30}$$

其中

$$H^\ell_t(y,y'):=\sum_{|i-j|\leqslant 1}\int_0^t\mathcal{R}^a_\ell(\tau_{y'}\check{\phi}^a_i\cdot\tau_{\Gamma_{-s}y}(\mathcal{R}^a_j\nabla_v\Gamma_sp_s))\mathrm{d}s.$$

此外，对于 $\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}$，我们有，

$$\widehat{H^\ell_t}(\zeta,\zeta')=-\mathrm{i}\int_0^t\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\cdot,\hat{\Gamma}_s\zeta+\zeta'\rangle}\phi^a_\ell(\hat{\Gamma}_s\zeta+\zeta')\psi(\hat{\Gamma}_s\zeta,\zeta')(\eta+s\xi)\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s,\tag{4.31}$$

其中 ψ 由 (4.21) 式定义.

证明 由定义知

$$\begin{aligned}\mathcal{R}^a_iX_\varepsilon\cdot(\mathcal{R}^a_j\nabla_v\mathscr{I}X_\varepsilon)(t)&=\int_0^t(\check{\phi}^a_i*X_\varepsilon)\cdot(\mathcal{R}^a_j\nabla_v\Gamma_sp_s)*(\Gamma_sX_\varepsilon)\mathrm{d}s\\&=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\left(\int_0^t\tau_{y'}\check{\phi}^a_i\cdot\tau_{\Gamma_{-s}y}(\mathcal{R}^a_j\nabla_v\Gamma_sp_s)\mathrm{d}s\right)X_\varepsilon(y)X_\varepsilon(y')\mathrm{d}y\mathrm{d}y',\end{aligned}$$

从而得到 (4.30). 现在来证明 (4.31), 令 $h:=\mathcal{R}^a_j(\nabla_v\Gamma_sp_s)$, 从简单的计算可得

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\zeta\cdot y+\zeta'\cdot y')}\check{\phi}^a_\ell*(\tau_{y'}\check{\phi}^a_i\cdot\tau_{\Gamma_{-s}y}h)\mathrm{d}y\mathrm{d}y'\\&\qquad=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\cdot,\hat{\Gamma}_s\zeta+\zeta'\rangle}\phi^a_\ell(\hat{\Gamma}_s\zeta+\zeta')\phi^a_i(\zeta')\hat{h}(-\hat{\Gamma}_s\zeta),\end{aligned}$$

其中我们用到了对于 $\zeta=(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^{2d}$,

$$\hat{h}(\zeta)=\phi^a_j(\zeta)(\mathrm{i}\eta)(\hat{\Gamma}_{-s}\hat{p}_s)(\zeta).$$

于是基于 $\hat{\Gamma}_{-s}\hat{\Gamma}_s\zeta=\zeta$，我们得到了 (4.31). 引理得证. □

注 4.4.1 注意到对于每一个 $y,y'\in\mathbb{R}^{2d}$，$H^\ell_t(y,y')$ 都是一个关于 z 的 $\mathbb{R}^d$-值函数. 在表达式 (4.30) 和 (4.31) 中，为了简洁我们隐去了变量 z. 在没有额外说明的情况下，我们接下来总是使用该记号.

为了方便，我们简记

$$M^\varepsilon_t(z):=(X_\varepsilon\circ\nabla_v\mathscr{I}X_\varepsilon(t))(z)$$

和

$$G^{\varepsilon,\varepsilon'}_{t,s}(z):=M^\varepsilon_t(z)-M^{\varepsilon'}_t(z)-M^\varepsilon_s(z)+M^{\varepsilon'}_s(z).\tag{4.32}$$

下面我们同样隐去其中的变量 z. 易知 $M_t^\varepsilon = \mathbb{E}M_t^\varepsilon + M_t^\varepsilon - \mathbb{E}M_t^\varepsilon$ 是对于 M_t^ε 的 Wiener 混沌分解，其中 $\mathbb{E}M_t^\varepsilon$ 是 0 阶 Wiener 混沌项，$M_t^\varepsilon - \mathbb{E}M_t^\varepsilon$ 是二阶 Wiener 混沌项. 接下来我们分开考虑这两项.

零阶 Wiener 混沌项. 在这一部分中，我们证明下面关于零阶 Wiener 混沌的收敛性

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to 0}\sup_{t\in[0,T]}\left\|\mathbf{E}M_t^\varepsilon - \mathbf{E}M_t^{\varepsilon'}\right\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} = 0. \tag{4.33}$$

可以发现在动理学框架下，该零阶项不不像经典热方程时为 0. 且再减去一个形式上发散，但在适当对称定义下为 0 的项 (即下面的 $\mathcal{J}_{22,\ell}^t$) 后，该零阶项在适当的 Besov 空间中收敛. 注意到由 (4.30) 可得

$$\mathcal{R}_\ell^a M_t^\varepsilon = (X_\varepsilon \otimes X_\varepsilon)(H_t^\ell). \tag{4.34}$$

则基于 (4.11)，有

$$\mathcal{R}_\ell^a \mathbf{E}M_t^\varepsilon = \mathbf{E}\mathcal{R}_\ell^a M_t^\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \widehat{H_t^\ell}(\zeta,-\zeta)\hat{\varphi}_\varepsilon^2(\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta) =: \Lambda_t^{\ell,\varepsilon}.$$

上式亦是随机场 $(X_\varepsilon \otimes X_\varepsilon)(H_t^\ell)$ 的零阶 Wiener 混沌项.

我们对 (4.31) 式进行如下的分解：

$$\begin{aligned}
\widehat{H_t^\ell}(\zeta,-\zeta) = &-\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\cdot,\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta\rangle}\phi_\ell^a(\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta)\Big(\psi(\hat{\Gamma}_s\zeta,-\zeta)-\psi(\zeta,-\zeta)\Big)\eta\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s\\
&-\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\cdot,\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta\rangle}\phi_\ell^a(\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta)\psi(\zeta,-\zeta)\eta\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s\\
&-\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\cdot,\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta\rangle}\phi_\ell^a(\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta)\psi(\hat{\Gamma}_s\zeta,-\zeta)s\xi\,\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s\\
&=: \mathcal{J}_{1,\ell}^t(\zeta)+\mathcal{J}_{2,\ell}^t(\zeta)+\mathcal{J}_{3,\ell}^t(\zeta).
\end{aligned}$$

对于 $\mathcal{J}_{1,\ell}^t(\zeta)$，注意到对于任意的 $\zeta=(\xi,\eta)$, 有

$$\hat{\Gamma}_s\zeta - \zeta = (0, s\xi), \tag{4.35}$$

从而由 (4.25) 并将 $\gamma = 2\alpha-1$ 代入 (4.27) 中可得

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{J}_{1,\ell}^t(\zeta)\|_{L^\infty} &\leqslant \int_0^t |\phi_\ell^a(\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta)|\,|\psi(\hat{\Gamma}_s\zeta,-\zeta)-\psi(\zeta,-\zeta)|\,|\eta|\,\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s\\
&\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}\int_0^t (1+|s\xi|)^{1-2\alpha}\frac{|s\xi|^{2\alpha-1}}{(1+|\zeta|_a)^{2\alpha-1}}|\eta|\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}(1+|\zeta|_a)^{2-2\alpha}\int_0^t \hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s\\
&\overset{(4.24),(4.28)}{\lesssim} 2^{(2\alpha-1)\ell}(1+|\zeta|_a)^{-2\alpha}.
\end{aligned}
$$

下一步考虑 $\mathcal{J}^t_{3,\ell}(\zeta)$, 既然 $|\psi|\lesssim 1$，于是由 (4.35)，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{J}^t_{3,\ell}(\zeta)\|_{L^\infty} &\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}\int_0^t (1+|s\xi|)^{1-2\alpha}|s\xi|\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s\\
&\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}\int_0^t |s\xi|^{2-2\alpha}\hat{p}_s(\zeta)\mathrm{d}s\\
&\overset{(4.24),(4.28)}{\lesssim} 2^{(2\alpha-1)\ell}(1+|\zeta|_a)^{-2\alpha}.
\end{aligned}
$$

接着考虑 $\mathcal{J}^t_{2,\ell}(\zeta)$，按照定义和 (4.24) ，有

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}^t_{2,\ell}(\zeta) = &-\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\cdot,\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta\rangle}\phi^a_\ell(\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta)\psi(\zeta,-\zeta)\eta\mathrm{e}^{-s|\eta|^2-s^3|\xi|^2/3}(\mathrm{e}^{-s^2\langle\xi,\eta\rangle}-1)\mathrm{d}s\\
&-\mathrm{i}\int_0^t \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\langle\cdot,\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta\rangle}\phi^a_\ell(\hat{\Gamma}_s\zeta-\zeta)\psi(\zeta,-\zeta)\eta\mathrm{e}^{-s|\eta|^2-s^3|\xi|^2/3}\mathrm{d}s\\
=&: \mathcal{J}^t_{21,\ell}(\zeta)+\mathcal{J}^t_{22,\ell}(\zeta).
\end{aligned}
$$

对于 $\mathcal{J}^t_{21,\ell}(\zeta)$，注意到

$$
|\mathrm{e}^{-s^2\langle\xi,\eta\rangle}-1|\leqslant |s\xi|\,|s\eta|\,\mathrm{e}^{s^2|\xi|\,|\eta|},
$$

则由 (4.24) 和 (4.28)，我们有

$$
\begin{aligned}
\|\mathcal{J}^t_{21,\ell}(\zeta)\|_{L^\infty} &\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}\int_0^t (1+|s\xi|)^{1-2\alpha}|s\xi||s\eta||\eta|\,\mathrm{e}^{-c_0(s^3|\xi|^2+s|\eta|^2)}\mathrm{d}s\\
&\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}\int_0^t |s\xi|^{2-2\alpha}|s\eta||\eta|\,\mathrm{e}^{-c_0(s^3|\xi|^2+s|\eta|^2)}\mathrm{d}s\\
&\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}|\xi|^{2-2\alpha}|\eta|^2\int_0^t s^{3-2\alpha}\mathrm{e}^{-c_0(s^3|\xi|^2+s|\eta|^2)}\mathrm{d}s\\
&\overset{(4.28)}{\lesssim} 2^{(2\alpha-1)\ell}(1+|\zeta|_a)^{-2\alpha}.
\end{aligned}
$$

另一方面，由 (4.35) 和 (4.22) 可得

$$
\mathcal{J}^t_{22,\ell}(\xi,-\eta)=-\mathcal{J}^t_{22,\ell}(\xi,\eta).
$$

因为 $\mu(\mathrm{d}\xi,-\mathrm{d}\eta)=\mu(\mathrm{d}\xi,\mathrm{d}\eta)$ 且 φ_ε 关于变量 v 对称，所以我们有

$$
\int_{\mathbb{R}^{2d}}\mathcal{J}^t_{22,\ell}(\zeta)\hat{\varphi}^2_\varepsilon(\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta)\equiv 0. \tag{4.36}
$$

因此，我们可以得到

$$\Lambda_t^{\ell,\varepsilon}=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\Big(\mathcal{J}_{1,\ell}^t(\zeta)+\mathcal{J}_{21,\ell}^t(\zeta)+\mathcal{J}_{3,\ell}^t(\zeta)\Big)\hat{\varphi}_\varepsilon^2(\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta),$$

和

$$\begin{aligned}\|\Lambda_t^{\ell,\varepsilon}-\Lambda_t^{\ell,\varepsilon'}\|_{L^\infty}&\lesssim\int_{\mathbb{R}^{2d}}\Big(\|\mathcal{J}_{1,\ell}^t(\zeta)\|_{L^\infty}+\|\mathcal{J}_{21,\ell}^t(\zeta)\|_{L^\infty}+\|\mathcal{J}_{3,\ell}^t(\zeta)\|_{L^\infty}\Big)\\&\qquad\times|\hat{\varphi}_\varepsilon^2(\zeta)-\hat{\varphi}_{\varepsilon'}^2(\zeta)|\mu(\mathrm{d}\zeta)\\&\lesssim 2^{(2\alpha-1)\ell}\int_{\mathbb{R}^{2d}}(1+|\zeta|_a)^{-2\alpha}|\hat{\varphi}_\varepsilon^2(\zeta)-\hat{\varphi}_{\varepsilon'}^2(\zeta)|\mu(\mathrm{d}\zeta).\end{aligned}$$

于是，由控制收敛定理可得

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to0}\sup_{\ell\geqslant-1}\sup_{t\in[0,T]}2^{(1-2\alpha)\ell}\|\Lambda_t^{\ell,\varepsilon}-\Lambda_t^{\ell,\varepsilon'}\|_{L^\infty}=0,\tag{4.37}$$

其中范数 $\|\cdot\|_{L^\infty}$ 是关于变量 z 取的. 因此，我们最后得到了 (4.33).

二阶 Wiener 混沌项. 基于 Kolmogorov 连续性定理和 Besov 嵌入定理，定理 2.1.1，只需证明对于某个 $\delta>0$ 和任意的 $\alpha>\beta$，任意的 $p\geqslant2$，有

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to0}\sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}(t-s)^{-\delta p}\mathbf{E}\Big(\|G_{t,s}^{\varepsilon,\varepsilon'}-\mathbf{E}G_{t,s}^{\varepsilon,\varepsilon'}\|^p_{\mathbf{B}^{1-2\alpha,a}_{p,p}(\varrho^\kappa)}\Big)=0.\tag{4.38}$$

既然 $G_{t,s}^{\varepsilon,\varepsilon'}-\mathbf{E}G_{t,s}^{\varepsilon,\varepsilon'}$ 属于二阶 Wiener 混沌空间，类似于估计 (4.29) 的方法，我们只需要证明

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon'\to0}\sup_{0\leqslant s<t\leqslant T}\sup_{\ell\geqslant-1}(t-s)^{-\delta}2^{(2-4\alpha)\ell}\|\mathrm{Var}(\mathcal{R}_\ell^aG_{t,s}^{\varepsilon,\varepsilon'})\|_{L^\infty}=0.\tag{4.39}$$

注意到由 (4.32) 和 (4.34) 可得

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_\ell^aG_{t,s}^{\varepsilon,\varepsilon'}&=(X_\varepsilon\otimes X_\varepsilon)(H_t^\ell-H_s^\ell)-(X_{\varepsilon'}\otimes X_{\varepsilon'})(H_t^\ell-H_s^\ell)\\&=(X_{\varphi_\varepsilon-\varphi_{\varepsilon'}}\otimes X_{\varphi_\varepsilon})(H_t^\ell-H_s^\ell)+(X_{\varphi_{\varepsilon'}}\otimes X_{\varphi_\varepsilon-\varphi_{\varepsilon'}})(H_t^\ell-H_s^\ell),\end{aligned}$$

则由 (4.12)，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\mathcal{R}_\ell^aG_{t,s}^{\varepsilon,\varepsilon'})&\leqslant2\mathrm{Var}((X_{\varphi_\varepsilon-\varphi_{\varepsilon'}}\otimes X_{\varphi_\varepsilon})(H_t^\ell-H_s^\ell))\\&\quad+2\mathrm{Var}((X_{\varphi_{\varepsilon'}}\otimes X_{\varphi_\varepsilon-\varphi_{\varepsilon'}})(H_t^\ell-H_s^\ell))\\&=4\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\mathrm{Sym}\big((\widehat{H_t^\ell}-\widehat{H_s^\ell})K^{(1)}_{\varepsilon,\varepsilon'}\big)(\zeta,\zeta')|^2\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta')\\&\quad+4\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}}|\mathrm{Sym}\big((\widehat{H_t^\ell}-\widehat{H_s^\ell})K^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon'}\big)(\zeta,\zeta')|^2\end{aligned}$$

$$\leqslant 4\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left|\left((\widehat{H_t^\ell}-\widehat{H_s^\ell})K^{(1)}_{\varepsilon,\varepsilon'}\right)(\zeta,\zeta')\right|^2\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta')$$
$$+4\int_{\mathbb{R}^{2d}}\int_{\mathbb{R}^{2d}} \left|\left((\widehat{H_t^\ell}-\widehat{H_s^\ell})K^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon'}\right)(\zeta,\zeta')\right|^2\mu(\mathrm{d}\zeta)\mu(\mathrm{d}\zeta'), \tag{4.40}$$

其中

$$K^{(1)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\zeta') := (\hat\varphi_\varepsilon(\zeta)-\hat\varphi_{\varepsilon'}(\zeta))\hat\varphi_\varepsilon(\zeta')$$

和

$$K^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\zeta') := \hat\varphi_{\varepsilon'}(\zeta)(\hat\varphi_\varepsilon(\zeta')-\hat\varphi_{\varepsilon'}(\zeta')).$$

首先，对于任意的 $\theta\in(0,1)$，有

$$|K^{(1)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\zeta')| \leqslant |(\hat\varphi_\varepsilon-\hat\varphi_{\varepsilon'})(\zeta)| \lesssim |\varepsilon-\varepsilon'|^{\theta/3}|\zeta|_a^\theta$$

和

$$|K^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\zeta')| \leqslant |(\hat\varphi_\varepsilon-\hat\varphi_{\varepsilon'})(\zeta')| \lesssim |\varepsilon-\varepsilon'|^{\theta/3}|\zeta'|_a^\theta.$$

此外，由 (4.31) 明显可以得到

$$\|(\widehat{H_t^\ell}-\widehat{H_s^\ell})K^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\zeta')\|_{L^\infty} \lesssim |\varepsilon-\varepsilon'|^{\theta/3}\int_s^t \Phi_r^\ell(\zeta,\zeta')|\zeta'|_a^\theta|\eta+r\xi|\,\hat p_r(\zeta)\mathrm{d}r,$$

和

$$\Phi_r^\ell(\zeta,\zeta') := |\phi_\ell^a(\hat\Gamma_r\zeta+\zeta')|\,|\psi(\hat\Gamma_r\zeta,\zeta')|.$$

再令 $\sigma,\gamma\geqslant 0$ 满足 $\sigma+\gamma=2\beta$. 注意到由 (4.25), (4.26) 和 (4.17) 可得

$$\|\Phi_r^\ell(\zeta,\cdot)|\cdot|_a^\theta\|^2_{L^2(\mu)} \lesssim \int_{\mathbb{R}^{2d}} \frac{2^{\sigma\ell}(1+|\hat\Gamma_s\zeta|_a)^{\gamma+2\theta}}{(1+|\hat\Gamma_s\zeta+\zeta'|_a)^\sigma(1+|\zeta'|_a)^\gamma}\mu(\mathrm{d}\zeta') \lesssim 2^{\sigma\ell}(1+|\hat\Gamma_s\zeta|_a)^{\gamma+2\theta},$$

则基于 Minkowski 不等式，我们有，

$$\begin{aligned}\Big\|\|(\widehat{H_t^\ell}-\widehat{H_s^\ell})K^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\cdot)\|_{L^\infty}\Big\|_{L^2(\mu)} &\lesssim \int_s^t |\varepsilon-\varepsilon'|^{\theta/3}\|\Phi_r^\ell(\zeta,\cdot)\|_{L^2(\mu)}\,|\eta+r\xi|\,\hat p_r(\zeta)\mathrm{d}r\\ &\lesssim |\varepsilon-\varepsilon'|^{\theta/3}2^{\frac{\sigma\ell}{2}}\int_s^t(1+|\hat\Gamma_r\zeta|_a)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}}|\eta+r\xi|\,\hat p_r(\zeta)\mathrm{d}r.\end{aligned} \tag{4.41}$$

因为 $|\eta|\vee|\xi|^{1/3}\leqslant|\zeta|_a$，所以再由 $\hat\Gamma_r\zeta=(\xi,\eta+r\xi)$，我们有

$$\begin{aligned}&(1+|\hat\Gamma_r\zeta|_a)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}}|\eta+r\xi|\\ &\lesssim (1+|\zeta|_a)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}}|\eta|+(r|\xi|)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}}|\eta|+(1+|\zeta|_a)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}}|r\xi|+(r|\xi|)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}+1}\end{aligned}$$

$$\lesssim (1+|\zeta|_a)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}+1} + r^{\frac{\gamma+2\theta}{2}}|\zeta|_a^{\frac{3(\gamma+2\theta)}{2}+1} + r(1+|\zeta|_a)^{\frac{\gamma+2\theta}{2}+3} + r^{\frac{\gamma+2\theta}{2}+1}|\zeta|_a^{\frac{3(\gamma+2\theta)}{2}+3}.$$

若我们取 $\sigma = 4\alpha - 2$ 且 $\alpha > \beta$，则

$$\tfrac{\gamma}{2} - 1 = \beta - 2\alpha < -\beta.$$

于是，由 (4.24) 和 (4.28)，对于足够小的 θ，存在一个常数 $\delta > 0$ 使得对于所有的 $0 \leqslant s < t \leqslant T$ 和 $\zeta = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^{2d}$，有，

$$\int_s^t (1+|\hat{\Gamma}_r\zeta|_a)^{\frac{\gamma+\theta}{2}} |\eta + r\xi|\, \hat{p}_r(\zeta)\mathrm{d}r \lesssim (t-s)^{\delta/2}(1+|\zeta|_a)^{-\beta}.$$

将其代入 (4.41) 中可得

$$\Big\|\big\|(\widehat{H^\ell_t} - \widehat{H^\ell_s})K^{(2)}_{\varepsilon,\varepsilon'}(\zeta,\cdot)\big\|_{L^\infty}\Big\|^2_{L^2(\mu)} \lesssim |\varepsilon - \varepsilon'|^{2\theta/3} 2^{(4\alpha-2)\ell}(t-s)^{\delta}(1+|\zeta|_a)^{-2\beta}.$$

当考虑包含有 $K^{(1)}$ 的项时，我们有相同的估计. 再将这些代入到 (4.40) 式的右边，我们就得到了 (4.38). 到此，定理 4.3.1 得证. □

第五章　奇异线性动理学方程

基于前面建立的交换子估计 (2.43)，(3.41) 和第 4.1 节引入的可重整化对的概念，我们在本章中给出带有奇异随机环境噪声的线性动理学方程的拟控制解的定义，以及其的存在唯一性. 具体地，我们考虑下面的带有耗散的线性动理学方程：对于任意的 $\lambda \geqslant 0$,

$$\mathscr{L}_\lambda u := (\partial_t - \Delta_v - v\cdot\nabla_x + \lambda)u = b\cdot\nabla_v u + f, \quad u(0) = \varphi, \tag{5.1}$$

其中 $b = (b_1, \cdots, b_d)$ 和 f 满足下面的假设：对于某个 $\alpha \in (\frac{1}{2}, \frac{2}{3})$ 和 $\rho_1, \rho_2 \in \mathscr{P}_{\rm w}$,

$$\begin{cases} (b,f) \in \mathbb{B}^\alpha_T(\rho_1,\rho_2), \quad b \in \mathbb{B}^\alpha_T(\rho_1), \quad T>0, \\ \text{两者拥有相同的逼近序列 } (b_n, f_n). \end{cases} \tag{5.2}$$

简单起见，我们定义

$$\ell^b_T(\rho_1) := \sum_{i=1}^d \mathbb{A}^{b,b_i}_{T,\infty}(\rho_1,\rho_1) + 1. \tag{5.3}$$

特别地，令

$$\mathbb{B}^\alpha_T := \mathbb{B}^\alpha_T(1,1), \quad \ell^b_T = \ell^b_T(1), \quad \mathbb{A}^{b,b}_{T,q} = \sum_{i=1}^d \mathbb{A}^{b,b_i}_{T,q}(1,1).$$

本章主要分为三个小节，在第 5.1 节，我们介绍拟控制解的定义，并建立一个有关拟控制解先验的局部化性质. 此局部化性质在经典解的情形下是显然可以由链式求导法则得到的. 但在拟控制计算的框架下，我们总是需要涉及非局部算子的 Bony 仿积运算，因此进行局部化时，需要对其磨光，并精细的比较逼近项和极限项 (见命题 5.1.1). 在第 5.2 节，利用 [114, 第 3 节] 中的方法，我们使用前面得到的有关动理学算子半群的正则性估计结果，当 b, f 没有权重时，得到了方程 (5.2) 的适定性和解关于 ℓ^b_T 的多项式依赖的一致估计. 最后在第 5.3 节，我们结合第 5.1 节的局部化性质和第 5.2 节的无权方程估计，根据动理学 Hölder 空间的局部刻画 (3.32)，得到了原方程 (5.2) 在多项式权重空间中的唯一拟控制解. 值得注意的是，我们这里全程没有涉及指数权技巧. 特别地，[114] 使用指数权才得到了解的唯一性，而我们这里唯一性由下面的先验估计 (5.43) 直接得到.

5.1 拟控制解

为了定义拟控制解，我们类似 (1.20) 的分析，给出下面的拟控制拟设:

$$u = P_t\varphi + u^\sharp + \nabla_v u \prec \mathscr{I}_\lambda b + \mathscr{I}_\lambda f, \tag{5.4}$$

其中 $u^\sharp$ 形式上满足下面的方程.

$$u^\sharp = \mathscr{I}_\lambda(\nabla_v u \succ b + b\circ\nabla_v u) + [\mathscr{I}_\lambda, \nabla_v u \prec]b. \tag{5.5}$$

注意到 $b\circ\nabla_v u$ 在经典意义下是不良定的. 我们利用可重整化对 (b,f) 和 (b,b)，使用拟控制拟设 (5.4) 和交换子给出如下的定义:

$$\begin{aligned} b\circ\nabla_v u &= b\circ\nabla_v u^\sharp + b\circ\nabla_v(\nabla_v u \prec \mathscr{I}_\lambda b) + b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f + b\circ\nabla_v P_t\varphi \\ &= b\circ\nabla_v u^\sharp + b\circ(\nabla_v^2 u \prec \mathscr{I}_\lambda b) + (b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda b)\cdot\nabla_v u \\ &\quad + \mathrm{com}(\nabla_v u, \nabla_v\mathscr{I}_\lambda b, b) + b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda f + b\circ\nabla_v P_t\varphi. \end{aligned} \tag{5.6}$$

综上形式的分析后，我们可以给出下面严格的拟控制解的定义.

定义 5.1.1 令 $T>0$，$\rho_1\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 为一个有界权和 $\rho_2,\rho_3\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 为两个任意多项式权. 在 (5.2) 的条件下，假设对于某 $\varepsilon>0$，$\varphi\in\mathbf{C}_a^{1+\alpha+\varepsilon}(\rho_2/\rho_1)$. 我们称 $u\in\mathbb{S}_T^{2-\alpha}(\rho_3)$ 是一个偏微分方程 (5.1) 关于 (b,f) 的拟控制解，若存在 $\rho_4\in\mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，有

$$u - P_t\varphi - \nabla_v u \prec \mathscr{I}_\lambda b - \mathscr{I}_\lambda f =: u^\sharp \in \mathbb{C}_{T,a}^{3-2\alpha}(\rho_4), \tag{5.7}$$

且 $u^\sharp$ 满足方程 (5.5) 其中 $b\circ\nabla_v u$ 由每一项都良定的 (5.6) 式给出 (良定性见(5.9)).

注 5.1.1 在上面的定义中，如果我们考虑 $\bar u = u - P_t\varphi$，那么初始值可以变为零. 这时，非齐次项 f 将会被下面的式子替代

$$\bar f = f + b\cdot\nabla_v P_t\varphi \in \mathbb{C}_{T,a}^{-\alpha}(\rho_2).$$

将 $\psi=1,\phi=\nabla_v P_t\varphi$ 和 $\rho_3=1,\rho_4=\rho_2/\rho_1$ 代入引理 4.1.3 可得

$$\|b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(b\cdot\nabla_v P_t\varphi)\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{1-2\alpha}(\rho_1\rho_2)} \lesssim \|\varphi\|_{\mathbf{C}_a^{1+\alpha+\varepsilon}(\rho_2/\rho_1)}\ell_T^b(\rho_1).$$

于是，我们依然有

$$(b,\bar f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\rho_1,\rho_2),$$

且 $\bar u$ 是一个方程 (5.1) 关于 $(b,\bar f)$ 的拟控制解，其中 $\bar u(0)=0$ 且

$$\bar u^\sharp = u^\sharp + \nabla_v P_t\varphi \prec \mathscr{I}_\lambda b - \mathscr{I}_\lambda(b\cdot\nabla_v P_t\varphi).$$

基于上述分析，在本学位论文余下的部分中，为了简便，如果没有特别说明，我们总是假设 $\varphi \equiv 0$.

首先，我们有下面的关于 $u^\sharp$ 正则性的先验估计.

定理 5.1.1 令 $u \in \mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)$ 为方程(5.1)在定义 5.1.1 下的拟控制解，其中 $\varphi \equiv 0$. 对于任意的 $\varepsilon > \frac{2\alpha-1}{2-3\alpha}$ 和 $\rho_4 := \rho_1^{1+\varepsilon}((\rho_1\rho_3) \wedge \rho_2)$，存在一个常数 $C = C(T, \varepsilon, \alpha, d, \rho_i, \ell^b_T(\rho_1)) > 0$ 使得对于所有的 $\lambda \geqslant 0$，

$$\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_4)} \lesssim_C \|u\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)} + \mathbb{A}^{b,f}_{T,\infty}(\rho_1, \rho_2). \tag{5.8}$$

证明 首先，我们证明对于任意的 $\gamma, \beta \in (\alpha, 2-2\alpha]$ 和 $\rho_5 \leqslant (\rho_1\rho_3) \wedge \rho_2$，

$$\|b \circ \nabla_v u\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_5)} \lesssim \ell^b_T(\rho_1)\Big(\|u\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\gamma}_{T,a}(\rho_3)} + \|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{\beta+1}_{T,a}(\rho_5)}\Big) + \mathbb{A}^{b,f}_{T,\infty}(\rho_1, \rho_2). \tag{5.9}$$

为此，只需要对 (5.6) 进行逐项估计.

- 因为 $\beta > \alpha$，由 (2.40)，有

$$\|b \circ \nabla_v u^\sharp\|_{L^\infty(\rho_1\rho_5)} \lesssim \|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \|\nabla_v u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{\beta}_{T,a}(\rho_5)} \leqslant \ell^b_T(\rho_1)\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{\beta+1}_{T,a}(\rho_5)}.$$

- 因为 $\gamma > \alpha$ 和 $\gamma + \alpha - 2 < 0$, 所以由 (2.39) 和 (2.40)，我们有

$$\begin{aligned}
\|b \circ (\nabla^2_v u \prec \mathscr{I}_\lambda b)\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1^2\rho_3)} &\lesssim \|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \|\nabla^2_v u \prec \mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\rho_1\rho_3)} \\
&\lesssim \|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \|\nabla^2_v u\|_{\mathbb{C}^{\gamma+\alpha-2}_{T,a}(\rho_3)} \|\mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \\
&\lesssim \|b\|^2_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \|u\|_{\mathbb{C}^{\gamma+\alpha}_{T,a}(\rho_3)} \lesssim \ell^b_T(\rho_1)\|u\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.
\end{aligned}$$

- 又因为 $\gamma > \alpha$，所以由 (2.41) 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla_v u (b \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda b)\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1^2\rho_3)} &\lesssim \|\nabla_v u\|_{\mathbb{C}^{\gamma+\alpha-1}_{T,a}(\rho_3)} \|b \circ \nabla_v \mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1^2)} \\
&\lesssim \ell^b_T(\rho_1)\|u\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.
\end{aligned}$$

- 因为 $\gamma > \alpha$，由 (2.43) 和 (3.38)，我们有

$$\begin{aligned}
\|\mathrm{com}(\nabla_v u, \nabla_v \mathscr{I}_\lambda b, b)\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1^2\rho_3)} &\lesssim \|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \|\nabla_v u\|_{\mathbb{C}^{\gamma+\alpha-1}_{T,a}(\rho_3)} \|\nabla_v \mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{1-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \\
&\lesssim \|b\|^2_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} \|u\|_{\mathbb{C}^{\gamma+\alpha}_{T,a}(\rho_3)} \lesssim \ell^b_T(\rho_1)\|u\|_{\mathbb{C}^{\alpha+\gamma}_{T,a}(\rho_3)}.
\end{aligned}$$

联立上面的估计，由 $\rho_1\rho_5 \leqslant \rho_1^2\rho_3$ 可得 (5.9).

接下来，由 (2.39)，我们有

$$\|\nabla_v u \succ b\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_3)} \lesssim \|u\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)} \|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)},$$

并且在(3.41)中取 $(k,\theta)=(0,2)$，由 (3.34)，有

$$\|[\mathscr{I}_\lambda,\nabla_v u\prec]b\|_{\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_3)}\lesssim\|\nabla_v u\|_{\mathbb{S}^{1-\alpha}_T(\rho_3)}\|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)}\lesssim\|u\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_T(\rho_3)}\|b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)}.$$

于是，由 (5.5)，(5.9)和 Schauder 估计 (3.39)，注意到 $\rho_5\leqslant\rho_3$，可得对于 $\beta\in(\alpha,2-2\alpha)$，有

$$\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_5)}\lesssim\|u\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_T(\rho_3)}+\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{\beta+1}_{T,a}(\rho_5)}+\mathbb{A}^{b,f}_{T,\infty}(\rho_1,\rho_2).\tag{5.10}$$

对于 $\varepsilon>\frac{2\alpha-1}{2-3\alpha}$，通过选取 β 足够接近 α，我们有

$$\theta:=\tfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}=\tfrac{\alpha+\beta-1}{1-\alpha}.$$

令

$$\rho_4:=\rho_1^{1+\varepsilon}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2),\quad\rho_5:=\rho_4^{\theta}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2)^{1-\theta}.$$

注意到 $\rho_1\rho_5=\rho_4$，基于 (2.23) 和 Young 不等式，对于任意的 $\delta>0$，有

$$\begin{aligned}\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{\beta+1}_{T,a}(\rho_5)}&\lesssim\|u^\sharp\|^{\theta}_{\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_4)}\|u^\sharp\|^{1-\theta}_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2)}\\&\leqslant\delta\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_4)}+C_\delta\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2)}.\end{aligned}$$

将其代入 (5.10) 并由 $\rho_4=\rho_1\rho_5$ 且取足够小的 δ，我们有

$$\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_4)}\lesssim\|u\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_T(\rho_3)}+\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2)}+\mathbb{A}^{b,f}_{T,\infty}(\rho_1,\rho_2).\tag{5.11}$$

另一方面，由 (5.7)，(2.39) 和 (3.38)，我们有

$$\begin{aligned}\|u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2)}&\lesssim\|u\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)}+\|\nabla_v u\prec\mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_1\rho_3)}+\|\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_2)}\\&\lesssim\|u\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)}+\|\nabla_v u\|_{L^\infty_T(\rho_3)}\|\mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_1)}+\|f\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)}\\&\lesssim\sqrt{\ell^b_T(\rho_1)}\|u\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)}+\|f\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)}.\end{aligned}\tag{5.12}$$

通过代入 (5.11)，我们完成证明. □

接下来，我们给出下面的重要的关于拟控制解的局部化结果. 此结果对于证明拟控制解的唯一性至关重要.

命题 5.1.1 令 u 为一个方程 (5.1) 关于 (b,f) 的拟控制解，其中 $\varphi=0$. 令 $\phi,\psi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^{2d})$ 并假设 $\psi\equiv1$ 在 ϕ 的支撑集上. 则 $\bar u:=u\phi\in\mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}$ 是方程 (5.1) 关于 $(\bar b,g)\in\mathbb{B}^\alpha_T$ 的一个拟控制解，其中

$$\bar b:=b\psi,\quad g:=\phi f-u\Delta_v\phi-2\nabla_v\phi\cdot\nabla_v u-(v\cdot\nabla_x\phi)u-(b\cdot\nabla_v\phi)u.$$

证明 不失一般性，我们假设 $\lambda = 0$. 首先，我们证明 $(\bar{b}, g) \in \mathbb{B}^{\alpha}_{T}$. 从 $\nabla_v \phi u \in \mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}$ 和引理 4.1.3易推 $(\bar{b}, \phi f - (b \cdot \nabla_v \phi)u) \in \mathbb{B}^{\alpha}_{T}$. 注意到

$$b' := -u\Delta_v \phi - 2\nabla_v \phi \cdot \nabla_v u - (v \cdot \nabla_x \phi)u \in \mathbb{S}^{1-\alpha}_{T,a} \subset \mathbb{C}^{1-\alpha}_{T,a}.$$

则由引理 4.1.1，我们有 $(\bar{b}, g) = (\bar{b}, \phi f - (b \cdot \nabla_v \phi)u + b') \in \mathbb{B}^{\alpha}_{T}$.

接下来，基于定义，只需要给出下式的证明

$$\bar{u} - \nabla_v \bar{u} \prec \mathscr{I}\bar{b} - \mathscr{I}g =: \bar{u}^{\sharp} \in \mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}. \tag{5.13}$$

上式中 $\bar{u}^{\sharp}$ 满足

$$\bar{u}^{\sharp} = \mathscr{I}(\nabla_v \bar{u} \succ \bar{b} + \bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}) + [\mathscr{I}, \nabla_v \bar{u} \prec]\bar{b}, \tag{5.14}$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{b} \circ \nabla_v \bar{u} := \bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}^{\sharp} + \bar{b} \circ (\nabla_v^2 \bar{u} \prec \mathscr{I}\bar{b}) + (\bar{b} \circ \nabla_v \mathscr{I}\bar{b}) \cdot \nabla_v \bar{u} \\ + \mathrm{com}(\nabla_v \bar{u}, \nabla_v \mathscr{I}\bar{b}, \bar{b}) + \bar{b} \circ \nabla_v \mathscr{I}g. \end{aligned} \tag{5.15}$$

因为 u 是一个拟控制解，基于定义我们有

$$u = \mathscr{I}(b \star \nabla_v u + f), \tag{5.16}$$

其中

$$b \star \nabla_v u := \nabla_v u \succ b + b \circ \nabla_v u + \nabla_v u \prec b. \tag{5.17}$$

取 $(b_n, f_n) \in L^{\infty}_{T} C^{\infty}_{b}$ 为 (5.2) 中定义的逼近序列. 我们考察下面关于 u 的逼近:

$$u_n := u^{\sharp} + \nabla_v u \prec \mathscr{I}b_n + \mathscr{I}f_n, \quad \bar{b}_n := b_n \psi, \quad \bar{u}_n := u_n \phi, \tag{5.18}$$

和

$$\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u} := (b \star \nabla_v u)\phi + (b \cdot \nabla_v \phi)u - \nabla_v \bar{u} \prec \bar{b} - \nabla_v \bar{u} \succ \bar{b}. \tag{5.19}$$

在经典的情形下，容易得到 $\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u} = \bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}$. 但在拟控制解的框架中，这并不是显然的. 这里我们介绍 $\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u}$ 是作为 $\bar{b}_n \circ \nabla_v \bar{u}_n$ 关于 $n \to \infty$ 的极限 (见下面的步骤 (ii)). 此外，不难证明当 $\bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}$ 被替换为 $\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u}$ 时，$\bar{u}^{\sharp}$ 满足 (5.14) (见下面的步骤 (iii)). 最终，我们使用逼近从而得到 $\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u} = \bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}$ (见下面的步

骤 (iv)). 我们接下来的证明分为下面四步:

(i) 我们证明 u_n 可以逼近 u 且对于某个 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，有

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n \cdot \nabla_v u_n - b \star \nabla_v u\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho)} = 0. \tag{5.20}$$

(ii) 我们证明 $\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u} \in \mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}$ 且

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{b}_n \circ \nabla_v \bar{u}_n - \bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u}\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}} = 0. \tag{5.21}$$

(iii) 我们证明对于 (5.13) 式定义的 $\bar{u}^\sharp$ 满足下面的式子

$$\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a} \ni \bar{u}^\sharp = \mathscr{I}(\nabla_v \bar{u} \succ \bar{b} + \bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u}) + [\mathscr{I}, \nabla_v \bar{u} \prec]\bar{b}. \tag{5.22}$$

(iv) 对于由 (5.15) 定义的 $\bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}$，我们给出

$$\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u} = \bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}. \tag{5.23}$$

步骤 *(i)*: 首先，从 (5.7)，(5.18)，(2.38) 和 (3.38) 中可得

$$\|u_n - u\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2)} \lesssim \|\nabla_v u\|_{\mathbb{L}^\infty_T(\rho_3)} \|b_n - b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)} + \|f_n - f\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_2)},$$

继而由 (4.3)，有

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\mathbb{C}^{2-\alpha}_{T,a}((\rho_1\rho_3)\wedge\rho_2)} = 0. \tag{5.24}$$

然后，基于 (2.39)，(5.24) 和 (4.3)，对于某个 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，也有

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n \prec \nabla_v u_n - b \prec \nabla_v u\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho)} = 0, \tag{5.25}$$

同时基于 (2.38)，(5.24) 和 (4.3)，有

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n \succ \nabla_v u_n - b \succ \nabla_v u\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho)} = 0. \tag{5.26}$$

事实上，由 (5.18)，有

$$\begin{aligned} b_n \circ \nabla_v u_n = {}& b_n \circ \nabla_v u^\sharp + b_n \circ (\nabla_v^2 u \prec \mathscr{I} b_n) + (b_n \circ \nabla_v \mathscr{I} b_n) \cdot \nabla_v u \\ & + \mathrm{com}(\nabla_v u, \nabla_v \mathscr{I} b_n, b_n) + b_n \circ \nabla_v \mathscr{I} f_n. \end{aligned}$$

于是, 由 (4.3), (4.4) 和引理 2.2.1, 2.2.4, 容易得到上式中的每一项都会在 $\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho)$ 空间中收敛到 (5.6) 中所对应的项，其中 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 为某一个多项式权. 因此，

$$\lim_{n\to\infty} \|b_n \circ \nabla_v u_n - b \circ \nabla_v u\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho)} = 0. \tag{5.27}$$

根据 $-\alpha < 1-2\alpha$，结合 (5.25)，(5.26) 和 (5.27)，我们可以得到 (5.20).

步骤 *(ii):* 在这一步中，我们首先对逼近的项使用链式求导法则，再对其取极限. 因为 $\psi\phi = \phi$，由求导链式法则可得

$$\bar{b}_n \cdot \nabla_v \bar{u}_n = (b_n \psi) \cdot \nabla_v (u_n \phi) = (b_n \cdot \nabla_v u_n)\phi + (b_n \cdot \nabla_v \phi) u_n.$$

所以，由 Bony 分解可知

$$\bar{b}_n \circ \nabla_v \bar{u}_n = (b_n \cdot \nabla_v u_n)\phi + (b_n \cdot \nabla_v \phi) u_n - \nabla \bar{u}_n \prec \bar{b}_n - \nabla \bar{u}_n \succ \bar{b}_n.$$

因为 $\phi, \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{2d})$，所以可有 (4.3) 和 (5.24) 得到

$$\lim_{n\to\infty} \|(b_n \cdot \nabla_v \phi) u_n - (b \cdot \nabla_v \phi) u\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}} = 0,$$

且基于引理 2.2.1，有

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{b}_n \prec \nabla_v \bar{u}_n - \bar{b} \prec \nabla_v \bar{u}\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{b}_n \succ \nabla_v \bar{u}_n - \bar{b} \succ \nabla_v \bar{u}\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}} = 0,$$

联立 (5.20) 和 (5.19) 即得到 (5.21).

此外，我们还可以使用 $\bar{b}_n \circ \nabla_v \bar{u}_n$ 的正则性来提升 $\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u}$ 的正则性. 事实上，

$$\begin{aligned}\bar{b}_n \circ \nabla_v \bar{u}_n &= (b_n\psi) \circ (\nabla_v u_n \phi) + (b_n \psi) \circ (\nabla_v \phi u_n) \\ &= [(\nabla_v u_n \phi)\circ, \psi] b_n + \psi [b_n \circ, \phi] \nabla_v u_n \\ &\quad + \psi\phi (b_n \circ \nabla_v u_n) + (b_n \psi) \circ (\nabla_v \phi u_n).\end{aligned}$$

则由 (5.21)，(2.44) 和 (5.27)，我们有

$$\|\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u}\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}} \leqslant \sup_n \|\bar{b}_n \circ \nabla_v \bar{u}_n\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}} < \infty. \tag{5.28}$$

步骤 *(iii):* 由链式法则，在广义函数的意义下有

$$\mathscr{L}\bar{u} = \mathscr{L}(u\phi) = \phi \mathscr{L} u - u \Delta_v \phi - 2\nabla_v \phi \cdot \nabla_v u - (v \cdot \nabla_x \phi) u.$$

在上式两边分别作用算子 $\mathscr{L}^{-1} = \mathscr{I}$，由 (5.16) 和定义式 (5.19)，我们可以得到

$$\bar{u} = \mathscr{I}((b \star \nabla_v u + f)\phi - u\Delta_v \phi - 2\nabla_v \phi \cdot \nabla_v u - (v \cdot \nabla_x \phi) u)$$

$$= \mathscr{I}(\bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u} + \nabla_v \bar{u} \prec \bar{b} + \nabla_v \bar{u} \succ \bar{b} + g),$$

再联立定义式 (5.13) 可得 (5.22). 此外，根据 (2.39) 和 (5.28), 有

$$\nabla_v \bar{u} \succ \bar{b} + \bar{b} \circledcirc \nabla_v \bar{u} \in \mathbb{C}_{T,a}^{1-2\alpha},$$

再由 (3.38) 和 (3.41)，我们明显有

$$\bar{u}^\sharp \in \mathbb{C}_{T,a}^{3-2\alpha}. \tag{5.29}$$

步骤 *(iv):* 为了证明 (5.23)，我们首先要找到关于 $\bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}$ 合适的逼近序列. 令

$$g_n := f_n \phi - u \Delta_v \phi - 2 \nabla_v \phi \cdot \nabla_v u - (b_n \cdot \nabla_v \phi) u - (v \cdot \nabla_x \phi) u.$$

根据引理 4.1.1 和 4.1.3 可得 $(b_n \psi, g_n)$ 是 $(\bar{b}, g)$ 的一个逼近序列，且 $g_n \to g$ 在 $\mathbb{C}_{T,a}^{-\alpha}$ 中收敛. 注意到

$$\begin{aligned}
&\bar{b}_n \circ \nabla_v (\bar{u}^\sharp + \nabla_v \bar{u} \prec \mathscr{I} \bar{b}_n + \mathscr{I} g_n) \\
&\quad = \bar{b}_n \circ \nabla_v \bar{u}^\sharp + \bar{b}_n \circ (\nabla_v^2 \bar{u} \prec \mathscr{I} \bar{b}_n) + (\bar{b}_n \circ \nabla_v \mathscr{I} \bar{b}_n) \cdot \nabla_v \bar{u} \\
&\quad\quad + \mathrm{com}(\nabla_v \bar{u}, \nabla_v \mathscr{I} \bar{b}_n, \bar{b}_n) + \bar{b}_n \circ \nabla_v \mathscr{I} g_n,
\end{aligned}$$

则由 (5.29)，(4.3)，(4.4)，引理 2.2.1，引理 2.2.4 和一些繁琐的初等计算，我们有

$$\lim_{n \to \infty} \bar{b}_n \circ \nabla_v (\bar{u}^\sharp + \nabla_v \bar{u} \prec \mathscr{I} \bar{b}_n + \mathscr{I} g_n) = \bar{b} \circ \nabla_v \bar{u}, \ \text{在}\ \mathbb{C}_{T,a}^{1-2\alpha}\ \text{空间中}. \tag{5.30}$$

上式中我们使用了引理 4.1.3 中的分解来得到 $\bar{b}_n \circ \nabla_v \mathscr{I} \bar{b}_n$ 到 $\bar{b} \circ \nabla_v \mathscr{I} \bar{b}$ 的收敛. 因此，由 (5.21) 和 (5.30)，我们只需说明在某个合适的函数空间中有

$$\lim_{n \to \infty} \bar{b}_n \circ \nabla_v (\bar{u}_n - \bar{u}^\sharp - \nabla_v \bar{u} \prec \mathscr{I} \bar{b}_n - \mathscr{I} g_n) =: \lim_{n \to \infty} \Lambda_n = 0. \tag{5.31}$$

事实上，由 (5.13)，有

$$\bar{u}^\sharp = \bar{u} - \nabla_v \bar{u} \prec \mathscr{I} \bar{b} - \mathscr{I} g = \phi \left(u^\sharp + (\nabla_v u \prec \mathscr{I} b) + \mathscr{I} f \right) - \nabla_v \bar{u} \prec \mathscr{I} \bar{b} - \mathscr{I} g,$$

再联立 (5.18) 可得

$$\Lambda_n = \bar{b}_n \circ \nabla_v \big((\nabla_v u \prec \mathscr{I} B_n) \phi - \nabla_v \bar{u} \prec \mathscr{I}(B_n \psi) + \phi \mathscr{I} F_n - \mathscr{I} G_n \big),$$

其中

$$B_n := b_n - b, \ F_n := f_n - f, \ G_n := g_n - g.$$

由引理 2.2.1，引理2.2.4，(4.3) 和 (4.4)，易得

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\Big(\bar{b}_n\circ\nabla_v((\nabla_v u\prec\mathscr{I}B_n)\phi)-\phi\nabla_v u(\bar{b}_n\circ\nabla_v\mathscr{I}B_n)\Big)\\
&=\phi\lim_{n\to\infty}\mathrm{com}(\nabla_v u,\nabla_v\mathscr{I}B_n,\bar{b}_n)=0
\end{aligned}
$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\big(\bar{b}_n\circ\nabla_v(\nabla_v\bar{u}\prec\mathscr{I}(B_n\psi))-\psi\nabla_v\bar{u}(\bar{b}_n\circ\nabla_v\mathscr{I}B_n)\big)=0.$$

此外，注意到

$$\phi\mathscr{I}F_n-\mathscr{I}G_n=-[\mathscr{I},\phi]F_n+\mathscr{I}(B_n\cdot\nabla_v\phi u),$$

由引理 3.4.3 和引理 3.4.2，我们也有

$$\lim_{n\to\infty}\big(\bar{b}_n\circ\nabla_v(\phi\mathscr{I}F_n-\mathscr{I}G_n)-(\nabla_v\phi u)(\bar{b}_n\circ\nabla_v\mathscr{I}B_n)\big)=0.$$

最后，因为 $\psi\nabla_v\bar{u}=\nabla_v(\phi u)$, 所以我们有

$$(\psi\nabla_v\bar{u}-\phi\nabla_v u-\nabla_v\phi u)(\bar{b}_n\circ\nabla_v\mathscr{I}B_n)\equiv 0,$$

联立上述三个极限即得 (5.31). 证毕. □

注 5.1.2 上面的结果在经典的情况下是显然可以有求导链式法则得到的. 但是，由于拟控制解是在重整式 (5.6) 的意义下理解的，所以我们不能直接使用链式法则，即 $b\cdot\nabla_v\mathscr{I}b$ 和 $b\cdot\nabla_v\mathscr{I}f$ 只是在逼近的意义的定义的. 因此，我们不得不首先构造合适的光滑逼近，使得我们使用链式法则. 在上述证明的最后一步 (步骤 (iv)) 中，一个明显的困难是虽然

$$\lim_{n\to\infty}\|b_n-b\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho)}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\|b_n\circ\nabla_v\mathscr{I}b_n-b\circ\nabla_v\mathscr{I}b\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho)}=0,$$

但是这并不能得到

$$\lim_{n\to\infty}b_n\circ\nabla_v\mathscr{I}(b_n-b)=0\text{ 在某个空间中.}$$

5.2 无权重的 Schauder 估计

在本节中，我们假设 $(b,f)\in\mathbb{B}^\alpha_T=\mathbb{B}^\alpha_T(1,1)$, 且回顾一下下面的记号.

$$\ell^b_T=\ell^b_T(1),\quad \mathbb{A}^{b,f}_{T,q}=\mathbb{A}^{b,f}_{T,q}(1,1).$$

在该假设下，我们按照 [114, 第 3.2 节] 的方法，一次给出下面的引理和定理. 本节的结果主要是为了后面第 5.3 节中在噪声 b, f 带有权重时证明方程 (5.1) 的适定性的内容服务的. 首先我们给出下面的引理.

引理 5.2.1 假设 $\varphi = 0$. 对于任意的 $\theta \in (1+\frac{3\alpha}{2}, 2)$，$q \in (\frac{2}{2-\theta}, \infty)$ 和 $T > 0$，存在常数 $c_0, c_1 > 0$ 只依赖于 θ, α, d, q, T 使得对于所有的 $\lambda \geqslant c_0(\ell_T^b)^{1/(1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q})}$ 和任意的 PDE (5.1) 的拟控制解 $u_\lambda = u$，有

$$\|u_\lambda\|_{\mathbb{S}_T^{\theta-\alpha}} \leqslant c_1(\ell_T^b)^{-1}\mathbb{A}_{T,q}^{b,f}. \tag{5.32}$$

此外，还存在一个常数 $c_2 > 0$ 使得对于所有的 $\lambda \geqslant 0$，有

$$\|u_\lambda\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}} + \|u_\lambda^\sharp\|_{L_T^\infty \mathbb{S}_T^{3-2\alpha}} \leqslant c_2(\ell_T^b)^{\frac{4}{2-3\alpha}}\Big(\|u_\lambda\|_{\mathbb{L}_T^\infty} + \mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}\Big). \tag{5.33}$$

证明　在本证明中，我们总是固定任意的

$$\theta \in (1+\tfrac{3\alpha}{2}, 2],\ \ q \in [\tfrac{2}{2-\theta}, \infty],\ \gamma, \beta \in (\alpha, \theta - 2\alpha].$$

明显地，由引理 3.3.1，(2.39) 和 (2.38)，我们有

$$\begin{aligned}(\lambda \vee 1)^{1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q}}\|u\|_{\mathbb{S}_T^{\theta-\alpha}} &\lesssim \|b \prec \nabla u + b \succ \nabla u + b \circ \nabla u + f\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{-\alpha}} \\ &\lesssim \|b\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{-\alpha}}\|\nabla u\|_{L_T^q L^\infty} + \|b \circ \nabla u\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{-\alpha}} + \mathbb{A}_{T,q}^{b,f},\end{aligned} \tag{5.34}$$

且由引理 3.4.2 和 (2.39)，有

$$\begin{aligned}(\lambda \vee 1)^{1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q}}\|u^\sharp\|_{\mathbf{C}_a^{\theta+\gamma-1}} &\lesssim (\lambda \vee 1)^{1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q}}\|[\mathscr{I}_\lambda, \nabla_v u \prec]b\|_{\mathbf{C}_a^{\theta+\frac{2}{q}+\gamma-\frac{2}{q}-1}} \\ &\quad + \|\nabla_v u \succ b\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{\gamma-1}} + \|b \circ \nabla_v u\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{\gamma-1}} \\ &\lesssim \|\nabla_{\mathrm{v}} u\|_{\mathbb{S}_T^{\gamma+\alpha-1}}\|b\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{-\alpha}} + \|b \circ \nabla_v u\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} \\ &\lesssim \|u\|_{\mathbb{S}_T^{\gamma+\alpha}}\|b\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{-\alpha}} + \|b \circ \nabla_v u\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{1-2\alpha}},\end{aligned}$$

其中在最后一个不等式处我们使用了 (3.34).

此外，根据 (5.9)，也有

$$\|b \circ \nabla u\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} \lesssim \ell_T^b\|u\|_{\mathbb{S}_T^{\gamma+\alpha}} + \sqrt{\ell_T^b}\|u^\sharp\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{\beta+1}} + \mathbb{A}_{T,q}^{b,f}.$$

于是，可以得到对于所有的 $\lambda \geqslant 0$，

$$\begin{aligned}&(\lambda \vee 1)^{1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q}}\Big(\|u\|_{\mathbb{S}_T^{\theta-\alpha}} + \|u^\sharp\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{\theta+\gamma-1}}\Big) \\ &\lesssim \ell_T^b\|u\|_{\mathbb{S}_T^{\gamma+\alpha}} + \sqrt{\ell_T^b}\|u^\sharp\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{\beta+1}} + \mathbb{A}_{T,q}^{b,f}.\end{aligned} \tag{5.35}$$

特别地，取 $\gamma=\theta-2\alpha$ 和 $\beta=2\theta-2\alpha-2$ 可得存在一个常数 $c=c(\theta,\alpha,d,q,T)$ 使得

$$(\lambda\vee 1)^{1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q}}\left(\|u\|_{\mathbb{S}_T^{\theta-\alpha}}+\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{2\theta-2\alpha-1}}\right)\lesssim_c \ell_T^b\left(\|u\|_{\mathbb{S}_T^{\theta-\alpha}}+\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{2\theta-2\alpha-1}}\right)+\mathbb{A}_{T,q}^{b,f}.$$

通过选取适当足够大的 λ 使得 $\lambda^{1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q}}\geqslant c\ell_T^b$，我们得到了 (5.32).

另外一边，在 (5.34) 中取 $\theta=2$ 和 $q=\infty$，我们发现对于任意的 $\gamma,\beta\in(\alpha,2-2\alpha]$，

$$\|u\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}}+\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}^{1+\gamma}}\lesssim \ell_T^b\|u\|_{\mathbb{S}_T^{\gamma+\alpha}}+\sqrt{\ell_T^b}\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{\beta+1}}+\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}. \tag{5.36}$$

若 $\alpha<\beta<\gamma<2-2\alpha$，则由插值不等式和 Young 不等式可得对于任意的 $\varepsilon\in(0,1)$，

$$\begin{aligned}\|u\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}}+\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{1+\gamma}}\leqslant{}&\varepsilon\left(\|u\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}}+\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{1+\gamma}}\right)+C_\varepsilon(\ell_T^b)^{\frac{2-\alpha}{2-\gamma-2\alpha}}\|u\|_{\mathbb{L}_T^\infty}\\&+C_\varepsilon(\ell_T^b)^{\frac{1+\gamma-\kappa}{2(\gamma-\kappa-\beta)}}\|u^\sharp\|_{\mathbb{L}_T^\infty}+C\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}.\end{aligned} \tag{5.37}$$

从 (5.4) 中注意到

$$\begin{aligned}\|u^\sharp\|_{\mathbb{L}_T^\infty}&=\|u-\nabla u\prec\mathscr{I}_\lambda b-\mathscr{I}_\lambda f\|_{\mathbb{L}_T^\infty}\\&\lesssim\|u\|_{\mathbb{L}_T^\infty}(1+\|b\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{-\alpha}})+\|f\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{-\alpha}}\lesssim\|u\|_{\mathbb{L}_T^\infty}\sqrt{\ell_T^b}+\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}.\end{aligned}$$

将其代入到 (5.37) 式中并取 $\varepsilon=1/2$，我们可以得到

$$\|u\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}}+\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{1+\gamma}}\lesssim(\ell_T^b)^{\frac{2-\alpha}{2-\gamma-2\alpha}\vee(\frac{1+\gamma-\kappa}{2(\gamma-\kappa-\beta)}+\frac{1}{2})}\left(\|u\|_{\mathbb{L}_T^\infty}+\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}\right),$$

继而通过选取 $\gamma=2/3$ 和充分接近 α 的 β 可得

$$\|u\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}}+\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{5/3}}\lesssim(\ell_T^b)^{\frac{8-3\alpha}{2(2-3\alpha)}}\left(\|u\|_{\mathbb{L}_T^\infty}+\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}\right).$$

这时，将 $\gamma=2-2\alpha$ 和 $\beta=2/3$ 代入式子 (5.36) 中，我们有

$$\|u^\sharp\|_{L_T^\infty\mathbf{C}_T^{3-2}}\lesssim\ell_T^b\|u\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}}+\sqrt{\ell_T^b}\|u^\sharp\|_{\mathbb{S}_T^{5/3}}+\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}\lesssim(\ell_T^b)^{\frac{4}{2-3\alpha}}\left(\|u\|_{\mathbb{L}_T^\infty}+\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}\right).$$

综上，该引理得证. □

紧接着，我们有下面的定理.

定理 5.2.1 令 $T>0$ 和 $\varphi=0$. 对于任意的 $(b,f)\in\mathbb{B}_T^\alpha$，在定义 5.1.1 的意义下，PDE (5.1) 存在唯一的拟控制解 u. 进一步地，存在一个足够大的只依赖于 α 的 $q>1$ 和只依赖于 α,d,T 的常数 $c_1,c_2>0$ 使得

$$\|u\|_{\mathbb{L}_T^\infty}\leqslant c_1(\ell_T^b)^{\frac{5}{2-3\alpha}}\mathbb{A}_{T,q}^{b,f},\quad\|u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{2-\alpha}}\leqslant c_2(\ell_T^b)^{\frac{9}{2-3\alpha}}\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}. \tag{5.38}$$

证明 **(存在性)** 令 b_n 和 f_n 是 $\mathbb{B}_T^\alpha$ 定义中 b 和 f 的光滑逼近函数. 我们接着考虑下面的逼近方程:

$$\partial_t u_n = \Delta u_n - \lambda u_n + b_n \cdot \nabla u_n + f_n, \quad u_n(0) = 0. \tag{5.39}$$

固定 $\lambda \geqslant 0$. 对于任意的 $\lambda' > 0$，众所周知下面的方程有唯一的经典解 w_n:

$$\begin{aligned} &\partial_t w_n = \Delta_v w_n + v \cdot \nabla_x w_n - (\lambda' + \lambda) w_n + b_n \cdot \nabla_v w + f_n, \\ &w(0) = 0. \end{aligned} \tag{5.40}$$

特别地，对于任意的 $\theta \in (1 + \frac{3}{2}\alpha, 2)$ 和 $q \in (\frac{2}{2-\theta}, \infty)$，由 (5.32) 可知对于任意的 $\lambda' \geqslant c_0(\ell_T^b)^{1/(1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q})}$,

$$\|w_n\|_{\mathbb{L}_T^\infty} \leqslant \|w_n\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{\theta-\alpha}} \leqslant c_1 \cdot \mathbb{A}_{T,q}^{b_n,f_n} \leqslant c_1 \cdot \mathbb{A}_{T,q}^{b,f}.$$

现在再令 u_n 为 PDE (5.39) 的唯一光滑解和 $\bar{u}_n = u_n - w_n$. 则 $\bar{u}_n$ 满足下面的方程:

$$\partial_t \bar{u}_n = \Delta_v \bar{u}_n + v \cdot \nabla_x \bar{u}_n - \lambda \bar{u}_n + b_n \cdot \nabla_v \bar{u}_n + \lambda' w_n, \quad \bar{u}(0) = 0.$$

根据极大值原理，定理 A.0.2，和 $\beta \leqslant 1$，我们有

$$\|\bar{u}_n\|_{\mathbb{L}_T^\infty} \leqslant \lambda' T (1 + \|w_n\|_{\mathbb{L}_T^\infty}).$$

因此，我们可以取 θ 足够接近 $1 + \frac{3\alpha}{2}$ 且 q 足够大从而得到

$$\|u_n\|_{\mathbb{L}_T^\infty} \leqslant (\lambda' T + 1)(\|w_n\|_{\mathbb{L}_T^\infty} + 1) \lesssim (\ell_T^b)^{1/(1-\frac{\theta}{2}-\frac{1}{q})} \cdot \mathbb{A}_{T,q}^{b,f} \lesssim (\ell_T^b)^{\frac{5}{2-3\alpha}} \cdot \mathbb{A}_{T,q}^{b,f},$$

这时联立 (5.33) 可得

$$\|u_n\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}} + \|u_n^\sharp\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{3-2\alpha}} \leqslant c_2 (\ell_T^b)^{\frac{9}{2-3\alpha}} \mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}, \tag{5.41}$$

其中 $u_n^\sharp$ 由 $u = u_n$ 时的 (5.5) 式给出. 于是，我们有下面的一致估计

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \left(\|u_n\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha}} + \|u_n^\sharp\|_{L_T^\infty \mathbf{C}_a^{3-2\alpha}} \right) \lesssim 1.$$

根据紧嵌入结果引理 3.2.1，对任意的 $\alpha' < \alpha$，$\kappa > 0$ 和 $\varrho^\kappa \in \mathscr{P}_{\rm w}$，存在函数 $u \in \mathbb{S}_T^{2-\alpha'}(\varrho^\kappa)$ 和 $u^\sharp \in \mathbb{C}_T^{3-2\alpha'}(\varrho^\kappa)$ 使得

$$\lim_{n \to \infty} \left(\|u_n - u\|_{\mathbb{S}_T^{2-\alpha'}(\varrho^\kappa)} + \|u_n^\sharp - u^\sharp\|_{\mathbb{C}_a^{3-2\alpha'}(\varrho^\kappa)} \right),$$

其中由于极限的唯一性可知函数 u 和 $u^\sharp$ 与 α' 和 κ 无关. 则由 (2.38), (5.9), (3.41) 和 (5.5)可得

$$\begin{aligned}u^\sharp=\lim_{n\to\infty}u_n^\sharp&=\lim_{n\to\infty}\left(\mathscr{I}_\lambda(\nabla_v u_n\succ b_n+b_n\circ\nabla_v u_n)+[\mathscr{I}_\lambda,\nabla_v u_n\prec]b_n\right)\\&=\mathscr{I}_\lambda(\nabla_v u\succ b+b\circ\nabla_v u)+[\mathscr{I}_\lambda,\nabla_v u\prec]b,\end{aligned}$$

其中 $\lim_{n\to\infty}$ 为 $\mathbb{C}_T^{3-2\alpha'}(\varrho^\kappa)$ 中范数意义下的极限. 类似地，(5.7) 亦成立. 于是可知 u 确实为 (5.1) 的一个拟控制解. 且联立 (5.41) 和 Fatou 引理可得 (5.38)，存在性证毕.

(唯一性) 假设 u_1 和 u_2 为方程 (5.1) 的两个拟控制解. 令 $\bar u:=u_1-u_2$. 明显地，$\bar u$ 是下面方程的拟控制解

$$\partial_t\bar u=\Delta_v\bar u+v\cdot\nabla_x\bar u-\lambda\bar u+b\cdot\nabla_v\bar u,\quad u(0)=0.$$

再令 $\theta\in(1+\alpha,2)$ 和 $q=\frac{2}{2-\theta}$. 这时我们有

$$\|\bar u\|^q_{\mathbb{S}_T^{\theta-\alpha}}\leqslant C\int_0^T\|(b\cdot\nabla_v\bar u)(t)\|^q_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}}\mathrm{d}t. \tag{5.42}$$

另一方面，由 (2.38)，(2.39) 和引理 5.1.1，有

$$\begin{aligned}\|(b\cdot\nabla_v\bar u)(t)\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}}&\leqslant\|(b\prec\nabla_v\bar u)(t)\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}}+\|(b\succ\nabla_v\bar u)(t)\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}}+\|(b\circ\nabla_v\bar u)(t)\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}}\\&\lesssim\|b(t)\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}}\|\nabla_v\bar u(t)\|_{L^\infty}+\|(b\circ\nabla_v\bar u)(t)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}}\\&\lesssim\|\nabla_v\bar u(t)\|_{L^\infty}+\|\bar u\|_{\mathbb{S}_t^{2-\alpha}}+\|\bar u^\sharp\|_{L_t^\infty\mathbf{C}_a^{3-2\alpha-\epsilon}}\overset{(5.33)}{\lesssim}\|\nabla_v\bar u\|_{\mathbb{L}_t^\infty}+\|\bar u\|_{\mathbb{L}_t^\infty}.\end{aligned}$$

将上式代入 (5.42) 并注意到 $\theta-\alpha>1$，则得到

$$\|\bar u\|^q_{L_T^\infty\mathbf{C}_a^{\theta-\alpha}}\leqslant C\int_0^T\|\bar u\|^q_{L_t^\infty\mathbf{C}_a^{\theta-\alpha}}\mathrm{d}t,$$

继而根据 Gronwall 不等式有 $\bar u=0$. 唯一性证毕. □

5.3 解的存在唯一性

在本节中，我们将给出 PDE (5.1) 的拟控制解的适定性. 其中主要用到动理学 Hölder 空间 $\mathbb{S}^\alpha_{T,a}(\rho)$ 的局部化刻画结果引理 3.2.3 ，拟控制解的先验局部化结果命题 5.1.1 和局部化拟控制解后，关于无权噪声时的 Schauder 估计的结果定理 5.2.1. 具体来说，我们有下面的在动理学 Hölder 空间中关于方程 (5.1) 的拟控制解的适定性定理.

定理 5.3.1 令 $\alpha\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$ 和 $\vartheta:=\frac{9}{2-3\alpha}$. 取 $\kappa_1>0$ 和 $\kappa_2\in\mathbb{R}$ 使得

$$(2\vartheta+2)\kappa_1\leqslant 1,\quad \kappa_3:=(2\vartheta+1)\kappa_1+\kappa_2.$$

基于 (3.5) 中的记号，定义

$$\rho_i:=\varrho^{\kappa_i}\in\mathscr{P}_{\rm w},\ i=1,2,3.$$

在 (5.2) 的假设下，对于任意的 $T>0$ 和 $\varphi\in\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_2/\rho_1)$，其中 $\gamma>1+\alpha$，存在一个方程 (5.1) 在定义 5.1.1 的意义下有关 (b,f) 的唯一的拟控制解 $u\in\mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)$ 使得

$$\|u\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)}\lesssim_C\|\varphi\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_2/\rho_1)}+\mathbb{A}^{b,f}_{T,\infty}(\rho_1,\rho_2),\tag{5.43}$$

其中常数 $C=C(T,d,\alpha,\kappa_i,\ell^b_T(\rho_1))>0$. 此外，若令 $(b_n,f_n)\in L^\infty_TC^\infty_b\times L^\infty_TC^\infty_b$ 为定义 4.1.1 中的逼近序列，令 $\varphi_n\in C^\infty_b$ 满足

$$\sup_n\|\varphi_n\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\rho_2/\rho_1)}<\infty,$$

和 φ_n 在 $\mathbb{R}^{2d}$ 上局部一致收敛到 φ，令 u_n 为方程 (5.1) 关于 (b_n,f_n) 和初值 φ_n 的唯一拟控制解，则对于任意的 $\beta>\alpha$ 和满足 $\lim_{z\to\infty}(\rho_4/\rho_3)(z)=0$ 的 $\rho_4\in\mathscr{P}_{\rm w}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{\mathbb{S}^{2-\beta}_{T,a}(\rho_4)}=0.\tag{5.44}$$

证明 我们主要关注先验估计 (5.43). 取 u 为方程 (5.1) 关于 (b,f) 的一个拟控制解. 不失一般性，我们假设 $\lambda=0$ 和 $\varphi=0$ (见注 5.1.1). 固定 $0<r<\frac{1}{16}$. 注意到 $\phi^z_{2r}=1$ 在 ϕ^z_r 的支撑集上成立. 因此对于任意的 $z\in\mathbb{R}^d$，由命题 5.1.1，$u_z:=u\phi^z_r$ 为下面偏微分方程的一个拟控制解:

$$\partial_tu_z=\Delta_vu_z+v\cdot\nabla_xu_z+b_z\cdot\nabla_vu_z+g_z,\quad u_z(0)=0,$$

其中 $b_z:=b\phi^z_{2r}$ 和

$$g_z:=f\phi^z_r-2\nabla_vu\cdot\nabla_v\phi^z_r-(\Delta_v\phi^z_r+v\cdot\nabla_x\phi^z_r)u-b\cdot\nabla_v\phi^z_ru.$$

根据定理 5.2.1，存在一个足够大的 $q>1$ 和两个常数 $c_1,c_2>0$ 使得对于所有的 $z\in\mathbb{R}^d$,

$$\|u_z\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_T}\leqslant c_1(\ell^{b_z}_T)^\vartheta\mathbb{A}^{b_z,g_z}_{T,\infty},\ \|u_z\|_{\mathbb{L}^\infty_T}\leqslant c_2(\ell^{b_z}_T)^\vartheta\mathbb{A}^{b_z,g_z}_{T,q}.\tag{5.45}$$

在下面的证明中，简单起见，我们会去掉时间变量. 基于 g_z 的定义，引理 2.2.1，(3.26) 和 (3.27)我们有，

$$\begin{aligned}\|g_z\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}} &\leqslant \|f\phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}} + 2\|\nabla_v u\cdot\nabla_v\phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}} + \|b\cdot\nabla_v\phi_r^z u\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}} \\ &\quad + \|u(\Delta_v\phi_r^z + v\cdot\nabla_x\phi_r^z)\|_{L^\infty} \\ &\lesssim \|f\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_2)}\|\phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_2^{-1})} + \|\nabla_v u\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_3)}\|\nabla_v\phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_3^{-1})} \\ &\quad + \|b\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_1)}\|u\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_3)}\|\nabla_v\phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^1((\rho_1\rho_3)^{-1})} \\ &\quad + \|u\|_{L^\infty(\rho_3)}\|\Delta_v\phi_r^z + v\cdot\nabla_x\phi_r^z\|_{L^\infty(\rho_3^{-1})} \\ &\lesssim \rho_2^{-1}(z)\|f\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_2)} + (\varrho\rho_1^{-1}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_3)}. \end{aligned} \tag{5.46}$$

因此，

$$\|g_z\|_{L_T^q\mathbf{C}_a^{-\alpha}} \lesssim \rho_2^{-1}(z)\|f\|_{L_T^q\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_2)} + (\varrho\rho_1^{-1}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{L_T^q\mathbf{C}_a^1(\rho_3)}. \tag{5.47}$$

同时，对于任意的 $\tilde\lambda \geqslant 0$，有

$$\begin{aligned}\|(b_z\circ\nabla_v\mathscr{I}_{\tilde\lambda}g_z)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} &\leqslant \|b_z\circ\nabla_v\mathscr{I}_{\tilde\lambda}(f\phi_r^z)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} + \|b_z\circ\nabla_v\mathscr{I}_{\tilde\lambda}(b\cdot\nabla_v\phi_r^z u)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} \\ &\quad + \|b_z\circ\nabla_v\mathscr{I}_{\tilde\lambda}(u(\Delta_v\phi_r^z + v\cdot\nabla_x\phi_r^z) + 2\nabla_v u\cdot\nabla_v\phi_r^z)\|_{L^\infty} \\ &=: I_1^z + I_2^z + I_3^z. \end{aligned}$$

考察 I_1^z 项时，把 $\rho_3 = \rho_1^{-1}$，$\rho_4 = \rho_2^{-1}$ 和 $\phi = \phi_r^z$ 代入 (4.6) 可得

$$I_1^z \lesssim \|\phi_{2r}^z\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_1^{-1})}\|\phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_2^{-1})}\mathbb{A}_{t,\infty}^{b,f}(\rho_1,\rho_2) \lesssim (\rho_1^{-1}\rho_2^{-1})(z)\mathbb{A}_{t,\infty}^{b,f}(\rho_1,\rho_2).$$

现在考虑 I_2^z. 将 $\rho_3 = \rho_1^{-2}, \rho_4 \equiv 1$ 和 $\psi = \nabla\phi_r^z u$ 代入 (4.6) 中可得

$$I_2^z \lesssim \|\phi_{2r}^z\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_1^{-2})}\|\nabla_v\phi_r^z u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1}\mathbb{A}_{t,\infty}^{b,b}(\rho_1,\rho_1) \lesssim (\varrho\rho_1^{-2}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1(\rho_3)},$$

其中我们使用了基于 (3.36) 和 (3.32) 的如下估计

$$\|\nabla_v\phi_r^z u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1} \lesssim \varrho(z)\|\phi_{2r}^z u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1} \lesssim (\varrho\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1(\rho_3)}.$$

对于 I_3^z 项，类似 (5.46) 式中的估计，由 (2.40)，引理 3.3.1 和 (3.27)，我们有

$$\begin{aligned} I_3^z &\lesssim \|b_z\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}}\|\nabla_v\mathscr{I}_{\tilde\lambda}(u(\Delta_v\phi_r^z + v\cdot\nabla_x\phi_r^z) + 2\nabla_v u\cdot\nabla_v\phi_r^z)\|_{\mathbf{C}_a^1} \\ &\lesssim \rho_1^{-1}(z)\|b\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_1)}\|u(\Delta_v\phi_r^z + v\cdot\nabla_x\phi_r^z) + 2\nabla_v u\cdot\nabla_v\phi_r^z\|_{\mathbb{C}_{t,a}^0} \\ &\lesssim (\varrho\rho_1^{-1}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbb{C}_{t,a}^1(\rho_3)} \lesssim (\varrho\rho_1^{-2}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbb{C}_{t,a}^1(\rho_3)}, \end{aligned}$$

其中我们在第二不等式处使用了如下放缩

$$\|b_z\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}} \lesssim \|b\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_1)} \|\phi_r^z\|_{\mathbf{C}_a^1(\rho_1^{-1})} \lesssim \rho_1^{-1}(z)\|b\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_1)}, \tag{5.48}$$

并且在第三个不等式处用到了 ρ_1 有界这一事实. 联立上述计算，对于任意的 $t \in [0, T]$，我们有

$$\|(b_z \circ \nabla_v \mathscr{I}_{\tilde{\lambda}} g_z)(t)\|_{\mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} \leqslant (\rho_1^{-1}\rho_2^{-1})(z)\mathbb{A}_{t,\infty}^{b,f}(\rho_1, \rho_2) + (\varrho\rho_1^{-2}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1(\rho_3)}.$$

现在由 $\mathbb{A}_{T,q}^{b_z,g_z}$ 的定义，(5.47)，(5.48) 和上面的计算，我们可以得到

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{T,q}^{b_z,g_z} &= \sup_{\tilde{\lambda}} \|b_z \circ \nabla_v \mathscr{I}_{\tilde{\lambda}} g_z\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{1-2\alpha}} + (\|b_z\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{-\alpha}} + 1)\|g_z\|_{L_T^q \mathbf{C}_a^{-\alpha}} \\
&\lesssim (\rho_1^{-1}\rho_2^{-1})(z)\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}(\rho_1, \rho_2) + (\varrho\rho_1^{-2}\rho_3^{-1})(z)\left(\int_0^T \|u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1(\rho_3)}^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{5.49}$$

另一方面，基于 (3.26)，并将 $\rho_3 = \rho_1^{-1}$, $\rho_4 = \rho_1^{-1}$ 和 $\phi = \psi = \phi_r^z$ 代入 (4.6) 可得

$$\|b_z \circ \nabla \mathscr{I}_{\tilde{\lambda}} b_z\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{1-2\alpha}} \lesssim \rho_1^{-2}(z)(\|b \circ \nabla \mathscr{I}_{\tilde{\lambda}} b\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{1-2\alpha}(\rho_1^2)} + \|b\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{-\alpha}(\rho_1)}^2).$$

因此，由 (5.48) 可得

$$\ell_T^{b_z} = \mathbb{A}_{T,\infty}^{b_z,b_z}(1,1) + 1 \lesssim \rho_1^{-2}(z)\ell_T^b(\rho_1),$$

然后，将 $q = \infty$ 代入 (5.49)，由 (5.45) ，有

$$\begin{aligned}
\|u_z\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{2-\alpha}} &\lesssim \rho_1^{-2\vartheta}(z)\Big[(\rho_1^{-1}\rho_2^{-1})(z)\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}(\rho_1, \rho_2) + (\varrho\rho_1^{-2}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^1(\rho_3)}\Big] \\
&= (\rho_1^{-1-2\vartheta}\rho_2^{-1})(z)\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}(\rho_1, \rho_2) + (\varrho\rho_1^{-2-2\vartheta}\rho_3^{-1})(z)\|u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^1(\rho_3)},
\end{aligned}$$

和

$$\|u_z\|_{\mathbb{L}_T^\infty} \lesssim (\rho_1^{-1-2\vartheta}\rho_2^{-1})(z)\mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}(\rho_1, \rho_2) + (\varrho\rho_1^{-2-2\vartheta}\rho_3^{-1})(z)\left(\int_0^T \|u\|_{\mathbb{S}_{t,a}^1(\rho_3)}^q \mathrm{d}t\right)^{1/q}.$$

根据上面的两个估计和下面的观察

$$\rho_3 = \rho_1^{1+2\vartheta}\rho_2, \quad \varrho\rho_1^{-2-2\vartheta} \leqslant 1,$$

再由引理 3.2.3 和引理 3.2.1，我们有

$$\|u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{2-\alpha}(\rho_3)} \lesssim \mathbb{A}_{T,\infty}^{b,f}(\rho_1, \rho_2) + \|u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^1(\rho_3)} \tag{5.50}$$

和

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty_T(\rho_3)} \lesssim \mathbb{A}^{b,f}_{T,\infty}(\rho_1,\rho_2) + \Big(\int_0^T \|u\|^q_{\mathbb{S}^1_{t,a}(\rho_3)}\mathrm{d}t\Big)^{1/q}. \tag{5.51}$$

这时由 (2.23) 和定义 3.2.1，有

$$\|u\|_{\mathbb{S}^1_{T,a}(\rho_3)} \lesssim \|u\|^{1/(2-\alpha)}_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)}\|u\|^{(1-\alpha)/(2-\alpha)}_{\mathbb{L}^\infty_T(\rho_3)},$$

继而由 Young 不等式可得对于任意的 $\varepsilon>0$，存在常数 $C_\varepsilon>0$ 使得

$$\|u\|_{\mathbb{S}^1_{t,a}(\rho_3)} \leqslant \varepsilon\|u\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_t(\rho_3)} + C_\varepsilon\|u\|_{\mathbb{L}^\infty_t(\rho_3)}.$$

将其代入 (5.50) 并选取充分小的 ε，我们有

$$\|u\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_{t,a}(\rho_3)} \lesssim \mathbb{A}^{b,f}_{T,\infty}(\rho_1,\rho_2) + \|u\|_{\mathbb{L}^\infty_t(\rho_3)},$$

再联立 (5.51)，由 Gronwall 不等式可得 (5.43).

(唯一性) 取 u_1,u_2 为方程 (5.1) 的两个拟控制解. 由定义易知 $u=u_1-u_2$ 依然是方程 (5.1) 关于 $f=\varphi=0$ 的拟控制解. 因此由 (5.43) 立刻可得 $u=0$.

(存在性) 令 $(b_n,f_n)\in L^\infty_T C^\infty_b\times L^\infty_T C^\infty_b$ 为定义 4.1.1 中的逼近列，且令 u_n 是方程 (5.1) 关于 (b_n,f_n) 的经典解. 基于先验估计 (5.43), (5.8) 和 (4.2)，我们有下面的一致估计

$$\sup_n\Big(\|u_n\|_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)} + \|u_n^\sharp\|_{\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_4)}\Big) < \infty. \tag{5.52}$$

再由引理 3.2.1，对于任意的 $\beta>\alpha$ 和满足 $\lim_{z\to\infty}(\rho_5/\rho_3)(z)=0$ 的 $\rho_5\in\mathscr{P}_{\rm w}$，存在 $u\in\mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)$ 和一个子列 n_k 使得

$$\lim_{k\to\infty}\|u_{n_k}-u\|_{\mathbb{S}^{2-\beta}_{T,a}(\rho_5)}=0.$$

此外，令 $u^\sharp := u-\nabla_v u\prec\mathscr{I}_\lambda b-\mathscr{I}_\lambda f$. 根据上面的估计, (2.39) 和 (3.39)，容易看出对于某个 $\rho_6\in\mathscr{P}_{\rm w}$，有

$$\lim_{k\to\infty}\|u^\sharp_{n_k}-u^\sharp\|_{\mathbb{L}^\infty_T(\rho_6)}=0,$$

再联立 (5.52) 并使用 Fatou 引理和插值不等式 (2.23)，有 $u^\sharp\in\mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_4)$ 且对于任意的 $\beta>\alpha$,

$$\lim_{k\to\infty}\|u^\sharp_{n_k}-u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{3-2\beta}_{T,a}(\rho_6\rho_4)}=0.$$

基于和定理 5.2.1 存在性证明一样的方法，可以证明 u 确实是一个定义 5.1.1意义下的拟控制解. 最后，基于拟控制解的唯一性，(5.44) 式中的所有极限都是成立的. 定理证毕. $\square$

第六章　　奇异非线性鞅问题解的适定性

在本章中，我们考虑下面的带有奇异环境噪声的动理学平均场随机微分方程:

$$\mathrm{d}X_t = V_t\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}V_t = W(t, X_t, V_t)\mathrm{d}t + (K * \mu_{X_t})(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}B_t, \tag{6.1}$$

其中对于某些 $\kappa > 0$，环境噪声 $W \in \mathbb{B}^{\alpha}_T(\varrho^{\kappa})$ 且交互核 $K(x) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 满足

$$K \in \cup_{\beta>\alpha-1}\mathbf{C}^{\beta/3}.$$

这里 μ_{X_t} 为 X_t 在 $\mathbb{R}^d$ 上的概率分布，且对于 $\mathbb{R}^d$ 上的测度 μ，

$$K * \mu(x) := \int_{\mathbb{R}^d} K(x-y)\mu(\mathrm{d}y).$$

根据 (B.1)，当 $K(x, v) = K(x)$ 时，有 $K \in \cup_{\beta>\alpha-1}\mathbf{C}^{\beta}_a$.

我们首先给出上述随机微分方程解的定义. 固定 $T > 0$. 令 $\mathcal{C}_T$ 为所有从 $[0, T]$ 映射到 $\mathbb{R}^{2d}$ 的连续函数组成的空间，令 $\mathcal{P}(\mathcal{C}_T)$ 为所有 $\mathcal{C}_T$ 上概率测度组成的空间，其中的拓扑由测度的弱收敛定义. 接着如下地定义 $\mathcal{C}_T$ 上的坐标过程 $(z_t)_{t\in[0,T]}$: 对于任意的 $\omega \in \mathcal{C}_T$，

$$z_t(\omega) := (x_t(\omega), v_t(\omega)) := \omega_t.$$

再令 $\mathscr{B}_t := \sigma(z_s, s \leqslant t)$ 为轨道过程的自然 σ-代数流.

正如绪言中所说，我们使用倒向的 Kolomogorov 方程来定义 (6.1) 的广义非线性鞅解. 具体地对于任意的连续测度值映射 $\mu : [0, T] \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$，我们定义

$$\mathscr{L}^{\mu}_t := \Delta_v + v \cdot \nabla_x + (W(t) + K * \mu_t) \cdot \nabla_v.$$

此时容易得到 $b := W + K * \mu_t \in \mathbb{B}^{\alpha}_T(\varrho^{\kappa})$. 事实上，由引理 4.1.1 可知其作为可重整化对的逼近序列为

$$b_n = W_n + K_n * \mu_t,$$

其中 $K_n = K * \phi_n$ 在一般的磨光子 ϕ_n 卷积下的关于 K 的磨光逼近. 特别地，有

$$\sup_n \ell^{b_n}_T(\varrho^{\kappa}) \lesssim \sup_n \ell^{W_n}_T(\varrho^{\kappa}) + \sup_n \|W_n\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\varrho^{\kappa})} \sup_{t\in[0,T]} \|K_n * \mu_t\|_{\mathbf{C}^{\beta/3}} < \infty, \tag{6.2}$$

其中的 $\beta > \alpha - 1$.

令 $f\in L^\infty_T C_b(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $\varphi\in \mathbf{C}^\gamma_a(\mathbb{R}^{2d})$，其中的 $\gamma>1+\alpha$ 且 $\vartheta:=\frac{9}{2-3\alpha}$. 由定理 5.3.1，下面的线性动理学方程总是存在唯一的关于 $(W+K*\mu,f)$ 的唯一拟控制解 $u^\mu_f\in \mathbb{S}^{2-\alpha}_{T;a}(\varrho^{2(\vartheta+1)\kappa})$：

$$\partial_t u^\mu_f+\mathscr{L}^\mu_t u^\mu_f=f,\quad u^\mu_f(T)=\varphi. \tag{6.3}$$

接着，对于任意的 $\delta>0$，令 $\mathcal{P}_\delta(\mathbb{R}^{2d})$ 为所有满足下面 $\mathbb{R}^{2d}$ 上的矩估计的概率测度 ν 组成的空间，

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}}\varrho(z)^{-\delta}\nu(\mathrm{d}z)\asymp\int_{\mathbb{R}^{2d}}(1+|z|^\delta_a)\nu(\mathrm{d}z)<\infty.$$

现在，我们可以给出下面的广义非线性鞅问题的定义.

定义 6.0.1 (广义非线性鞅问题) 令 $\delta>0$. 我们称一个概率测定 $\mathbb{P}\in\mathcal{P}(\mathcal{C}_T)$ 为随机微分方程 (6.1) 从 $\nu\in\mathcal{P}_\delta(\mathbb{R}^{2d})$ 出发的一个广义非线性鞅问题但解，若 $\mathbb{P}\circ z_0^{-1}=\nu$ 并且对于所有的 $f\in L^\infty_T C_b(\mathbb{R}^{2d})$，$\gamma>1+\alpha$ 和 $\varphi\in\mathbf{C}^\gamma_a(\mathbb{R}^{2d})$，

$$M_t:=u^\mu_f(t,z_t)-u^\mu_f(0,z_0)-\int_0^t f(s,z_s)\mathrm{d}s$$

是一个 $\mathbb{P}$ 下的关于流 $(\mathscr{B}_t)$ 的鞅，其中 $\mu_t:=\mathbb{P}\circ x_t^{-1}$ 且 u^μ_f 是偏微分方程 (6.3) 的唯一拟控制解. 记包含所有随机微分方程 (6.3) 关于 W,K 和初始测度 ν 的广义非线性鞅问题的解的空间为 $\mathscr{M}_\nu(W,K)$.

注 6.0.1 上面关于 ν 的矩假设是为了使得期望项 $\mathbb{E}u^\mu_f(0,z_0)$ 有意义，因为拟控制解 u^μ_f 只存在于多项式权空间中.

下面是我们本章节，甚至是本学位论文中最重要的结论：

定理 6.0.1 取 $\alpha\in(\frac12,\frac23)$ 和 $\vartheta:=\frac{9}{2-3\alpha}$. 假设对于某些 $\kappa\in(0,\frac{1}{2\vartheta+2}]$ 和 $\beta>\alpha-1$，有

$$W\in\mathbb{B}^\alpha_T(\varrho^\kappa),\quad K\in\mathbf{C}^{\beta/3}.$$

则对于任意的 $\delta>(4\vartheta+4)\kappa$ 和 $\nu\in\mathcal{P}_\delta(\mathbb{R}^{2d})$，关于随机微分方程 (6.1)，存在至少一个广义非线性鞅问题的解 $\mathbb{P}\in\mathscr{M}_\nu(W,K)$. 进一步，如果 K 是有界可测的，那么至多存在一个 $\mathbb{P}\in\mathscr{M}_\nu(W,K)$.

该定理存在性方面的证明主要从卷积磨光和一致估计中得到. 唯一性方面，我们首先对于 $K=0$ 的情形证明，再使用 Girsanov 定理证明非线性的情况. 令 W_n 是关于 $W\in\mathbb{B}^\alpha_T(\varrho^\kappa)$ 定义中的逼近序列，再令 $K_n=K*\phi_n$，其中 $\phi_n(x)=n^d\phi_1(nx)$ 是通常的磨光子函数. 我们接下来考虑下面的带有磨光系数的随机微分方程：

$$\mathrm{d}X^n_t=V^n_t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}V^n_t=W_n(t,Z^n_t)\mathrm{d}t+(K_n*\mu_{X^n_t})(X^n_t)\mathrm{d}t+\sqrt{2}\mathrm{d}B_t, \tag{6.4}$$

其中 $Z^n=(X^n,V^n)$ 和 $\mathbf{P}^{-1}\circ Z_0^n=\nu$. 因为 W_n 和 K_n 都是全局 Lipschitz 的，众所周知地，方程 (6.4) 存在唯一的强解 Z^n (参考 [107, 定理 2.1]). 我们首先基于偏微分方程的方法建立下面的关于 V_t^n 的一致矩估计：

引理 6.0.1 在定理 6.0.1 的假设下，对于任意的 $p\in(2,\frac{\delta}{(2\vartheta+2)\kappa}]$，存在一个常数 $C>0$ 使得对于所有的 $0\leqslant s<t\leqslant T$，有

$$\sup_n \mathbf{E}|V_t^n-V_s^n|^p\lesssim_C (t-s)^{p/2}.$$

证明 通过观察随机微分方程 (6.4) 的形式，我们只需证明

$$\sup_n \mathbf{E}\left|\int_s^t b_n(r,Z_r^n)\mathrm{d}r\right|^p\lesssim_C |t-s|^{(2-\alpha)p/2}, \tag{6.5}$$

其中

$$b_n(t,x,v):=W_n(t,x,v)+(K_n*\mu_{X_t^n})(x)\in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d}).$$

固定 $t\in[0,T]$. 令 u_n 是下面动理学方程的经典解

$$\partial_t u_n=\Delta_v u_n+v\cdot\nabla_x u_n+b_n^t\cdot\nabla_v u_n-b_n^t,\quad u_n(0)=0,$$

其中 $b_n^t(s,z)=b_n(t-s,z)$. 基于定理 5.3.1, 对于 $\sigma:=(2\vartheta+2)\kappa$，我们有

$$\sup_n \|u_n\|_{\mathbb{S}_{t,a}^{2-\alpha}(\varrho^\sigma)}<\infty. \tag{6.6}$$

定义

$$u_n^t(s):=u_n(t-s).$$

则 u_n^t 满足下面的倒向方程：

$$\partial_r u_n^t+\Delta_v u_n^t+v\cdot\nabla_x u_n^t+b_n\cdot\nabla_v u_n^t=b_n,\quad u_n^t(t)=0.$$

由 (6.4) 和 Itô 公式可得

$$\begin{aligned}\int_s^t b_n(r,Z_r^n)\mathrm{d}r&=u_n^t(t,Z_t^n)-u_n^t(s,Z_s^n)-\sqrt{2}\int_s^t\nabla_v u_n^t(r,Z_r^n)\mathrm{d}B_r\\&=u_n^t(t,\Gamma_{t-s}Z_s^n)-u_n^t(s,Z_s^n)-\sqrt{2}\int_s^t\nabla_v u_n^t(r,Z_r^n)\mathrm{d}B_r,\end{aligned}$$

其中的第二等式是由于

$$u_n^t(t,Z_t^n)=0=u_n^t(t,\Gamma_{t-s}Z_s^n).$$

根据 BDG 不等式，(3.20) 和 (3.34)，我们对任意的 $p \in (2, \frac{\delta}{(2\vartheta+2)\kappa}]$ 有

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left|\int_s^t b_n(r, Z_r^n)\mathrm{d}r\right|^p &\lesssim (t-s)^{(2-\alpha)p/2}\|u_n\|^p_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_{t,a}(\varrho^\sigma)}\mathbf{E}\varrho^{-p\sigma}(Z_s^n) \\ &\quad + \|\nabla_v u_n\|^p_{\mathbb{L}^\infty_t(\varrho^\sigma)}\mathbf{E}\left(\int_s^t \varrho^{-2\sigma}(Z_r^n)\mathrm{d}r\right)^{p/2} \\ &\lesssim ((t-s)^{(2-\alpha)p/2}+(t-s)^{p/2})\|u_n\|^p_{\mathbb{S}^{2-\alpha}_{t,a}(\varrho^\sigma)}\sup_{r\in[0,t]}\mathbf{E}\varrho^{-p\sigma}(Z_r^n).\end{aligned} \tag{6.7}$$

下面我们宣称有

$$\sup_n \sup_{s\in[0,t]} \mathbf{E}\varrho^{-\delta}(Z_s^n) \lesssim \int_{\mathbb{R}^{2d}} \varrho(z)^{-\delta}\nu(\mathrm{d}z). \tag{6.8}$$

这时，注意到 $p\sigma \leqslant \delta$，则由 (6.7)，(6.8) 和 (6.6)，我们得到了 (6.5). 即为所得.

最后，我们使用 Itô-Tanaka 技巧来证明 (6.8)，即建立随机微分方程和偏微分方程直接的关系. 定义 $\rho_\delta := \rho^{-\delta}$. 由 Itô 公式，我们有

$$\mathbf{E}\rho_\delta(Z_s^n) = \mathbf{E}\rho_\delta(Z_0^n) + \mathbf{E}\int_0^s (\Delta_v + v\cdot\nabla_x)\rho_\delta(Z_r^n)\mathrm{d}r + \mathbf{E}\int_0^s (b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta)(r, Z_r^n)\mathrm{d}r.$$

注意到由 (3.7) 有 $|\Delta_v\rho_\delta + v\cdot\nabla_x\rho_\delta|(z) \leqslant C_0\rho_\delta(z)$, 则

$$\mathbf{E}\rho_\delta(Z_s^n) \leqslant \mathbf{E}\rho_\delta(Z_0^n) + C_0\mathbf{E}\int_0^s \rho_\delta(Z_r^n)\mathrm{d}r + \mathbf{E}\int_0^s (b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta)(r, Z_r^n)\mathrm{d}r.$$

基于 Gronwall 不等式，我们只需要关于 n 一致地估计最后一项. 为此，我们基于 Krylov 估计的方法使用定理 5.3.1 中的结果. 具体来说，对于任意固定的 $s\in[0,t]$，令 $w_n^s = w_n^s(r,z)$ 为下面带有光滑系数的倒向偏微分方程的经典解：

$$\partial_r w_n^s + (\Delta_v + v\cdot\nabla_x + b_n\cdot\nabla_v)w_n^s = b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta, \quad w_n^s(s) = 0.$$

由 Itô 公式可得

$$0 = \mathbf{E}w_n^s(s, Z_s^n) = \mathbf{E}w_n^s(0, Z_0^n) + \mathbf{E}\int_0^s (b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta)(r, Z_r^n)\mathrm{d}r.$$

因此

$$\left|\mathbf{E}\int_0^s (b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta)(r, Z_r^n)\mathrm{d}r\right| \leqslant |\mathbf{E}w_n^s(0, Z_0^n)|. \tag{6.9}$$

另一方面，取 $\gamma\in(\alpha,1)$ 并定义 $\bar\rho := (\rho_\delta\varrho)^{-1}$. 从 (3.7) 和 (2.28) 中可以看出

$$\|\nabla_v\rho_\delta\|_{\mathbf{C}^\gamma_a(\bar\rho)} < \infty,$$

继而由 (2.41) 和 (6.2) 可得

$$\|b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\varrho^\kappa\bar\rho)}\lesssim\|b_n\|_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\varrho^\kappa)}\|\nabla_v\rho_\delta\|_{\mathbb{C}^{\gamma}_{T,a}(\bar\rho)}<\infty.$$

此外，根据引理 4.1.3，我们有

$$\begin{aligned}\|b_n\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta)\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\varrho^{2\kappa}\bar\rho)}&\leqslant\|(b_n\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda b_n)\nabla_v\rho_\delta\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\varrho^{2\kappa}\bar\rho)}\\&+\|b_n\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta)-(b_n\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda b_n)\nabla_v\rho_\delta\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\varrho^{2\kappa}\bar\rho)}\\&\lesssim\|b_n\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda b_n\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\varrho^{2\kappa})}\|\nabla_v\rho_\delta\|_{\mathbf{C}^{\gamma}_{a}(\bar\rho)}+\|b_n\|^2_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\varrho^\kappa)}\|\nabla_v\rho_\delta\|_{\mathbf{C}^{\gamma}_{a}(\bar\rho)}.\end{aligned}$$

因为 $(2\vartheta+2)\kappa\leqslant1$，所以由定理 5.3.1 可得

$$\sup_n\|w^t_n\|_{\mathbb{L}^\infty_T(\rho_\delta^{-1})}\leqslant\sup_n\|w^t_n\|_{\mathbb{L}^\infty_T(\varrho^{(2\vartheta+1)\kappa}\bar\rho)}\lesssim\sup_n\mathbb{A}^{b_n,b_n\cdot\nabla_v\rho_\delta}_{T,\infty}(\varrho^\kappa,\rho^\kappa\bar\rho)<\infty,$$

进而存在常数 $C_1>0$ 使得对于所有的 $z\in\mathbb{R}^{2d}$

$$\sup_n|w^t_n(0,z)|\leqslant C_1\rho_\delta(z).$$

将其代入 (6.9)，我们便得到了 (6.8). 证毕. □

现在我们是时候可以给出定理 6.0.1 的证明了.

证明 (**定理** 6.0.1 **的证明**) **(存在性)** 令 $\mathbb{P}_n=\mathbf{P}\circ Z^n_\cdot$ 是 Z^n 在 $(\mathcal{C}_T,\mathscr{B}_T)$ 中的概率分布. 根据引理 6.0.1 和 Kolmogorov 连续性判别法则，对于每一个 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{\delta\to0}\sup_n\mathbf{P}\left(\sup_{s\neq t\in[0,T],|t-s|\leqslant\delta}|V^n_t-V^n_s|>\varepsilon\right)=0.$$

因为 $X^n_t=\int_0^tV^n_s\mathrm{d}s+X_0$ 和

$$\lim_{R\to\infty}\sup_n\mathbf{P}(|Z^n_0|>R)=\lim_{R\to\infty}\nu\{z:|z|>R\}=0,$$

所以很容易观察到对于每一个 $\varepsilon>0$ 有

$$\lim_{\delta\to0}\sup_n\mathbf{P}\left(\sup_{s\neq t\in[0,T],|t-s|\leqslant\delta}|Z^n_t-Z^n_s|>\varepsilon\right)=0.$$

于是 $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $\mathcal{C}_T$ 中是胎紧的.

令 $\mathbb{P}$ 是序列 $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 的一个聚点. 不妨我们就假设 $\mathbb{P}_n$ 到弱收敛 $\mathbb{P}$. 定义

$$\mu_n:=\mathbb{P}_n\circ X^{-1}_\cdot,\quad\mu:=\mathbb{P}\circ X^{-1}_\cdot.$$

让 ϕ_n 为 $\mathbb{R}^{2d}$ 上经典的磨光函数并定义

$$f_n(t,z) := f(t,\cdot) * \phi_n(z), \quad \varphi_n(z) := \varphi * \phi_n(z)$$

和

$$b_n := W_n + K_n * \mu_n, \quad b := W + K * \mu.$$

因为 $b_n, f_n \in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$，所以显然下面的方程有一个唯一的经典解 $u_n \in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$：

$$\partial_t u_n + (\Delta_v + v \cdot \nabla_x + b_n \cdot \nabla_v) u_n = f_n, \quad u_n(T) = \varphi_n. \tag{6.10}$$

现在我们定义 $\mathcal{C}_T$ 上的两个泛函：

$$M_t^n := M_t^n(z) := u_n(t, z_t) - u_n(0, z_0) - \int_0^t f_n(s, z_s) \mathrm{d}s$$

和

$$M_t := M_t(z) := u_f^\mu(t, z_t) - u_f^\mu(0, z_0) - \int_0^t f(s, z_s) \mathrm{d}s.$$

我们希望证明对于任意的 $0 \leqslant s < t \leqslant T$ 和 $\mathcal{C}_T$ 上的 $\mathscr{B}_s$--可测的有界连续泛函 G_s，有

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(M_t G_s\big) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(M_s G_s\big). \tag{6.11}$$

实际上，对于每一个 $n \in \mathbb{N}$，由 (6.4)，(6.10) 和 Itô 公式，

$$M_t^n(Z^n) = \int_0^t \nabla_v u_n(s, Z_s^n) \mathrm{d}B_s$$

是一个 $\mathbf{P}$-鞅. 因此，

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\big(M_t^n G_s\big) = \mathbf{E}\big(M_t^n(Z^n) G_s(Z^n)\big) = \mathbf{E}\big(M_s^n(Z^n) G_s(Z^n)\big) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\big(M_s^n G_s\big).$$

于是，为了证明 (6.11)，只需要给出下面的收敛

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\big(M_t^n G_s\big) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(M_t G_s\big). \tag{6.12}$$

注意到基于引理 B.0.2，对于任意的 $\gamma \in (\alpha - 1, \beta)$，有

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n * \mu_n - K * \mu\|_{\mathbb{C}^\gamma_{T,a}} = 0,$$

进而联立引理 4.1.1 有

$$(b,f)\in\mathbb{B}_T^\alpha(\varrho^\kappa,1),\ \text{其中逼近序列为}\ (b_n,f_n).$$

则由定理 5.3.1，对于任意的 $\sigma>(2+2\vartheta)\kappa$，我们有

$$\sup_n\|u_n\|_{\mathbb{L}_T^\infty(\varrho^\sigma)}<\infty,\quad \lim_{n\to\infty}\|u_n-u_f^\mu\|_{\mathbb{L}_T^\infty(\varrho^\sigma)}=0. \tag{6.13}$$

此外，由 (6.8) 对于任意的 $\delta>(4+4\vartheta)\kappa$，有

$$\sup_n\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\Big(\varrho^{-\delta}(z_t)+\varrho^{-\delta}(z_0)\Big)<\infty.$$

我们注意到

$$|M_t^n-M_t|\leqslant\|u_n-u_f^\mu\|_{\mathbb{L}_T^\infty(\varrho^\sigma)}\Big(\varrho^{-\sigma}(z_t)+\varrho^{-\sigma}(z_0)\Big)+\int_0^t|f_n-f|(s,z_s)\mathrm{d}s.$$

并且因为对于每一个 $s\in[0,t]$，$(\mathbb{P}_n\circ z_s^{-1})_{n\in\mathbb{N}}$ 是胎紧的，又有下面的式子对任意的 $R>0$ 成立，

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{|z|\leqslant R}|f_n(s,z)-f(s,z)|=0,$$

所以我们有

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\int_0^t|f_n-f|(s,z_s)\mathrm{d}s\leqslant\int_0^t\lim_{n\to\infty}\sup_{|z|\leqslant R}|f_n(s,z)-f(s,z)|\mathrm{d}s+\frac{C}{R^\delta}\int_0^t\sup_n\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\varrho^{-\delta}(z_s)\mathrm{d}s.$$

于是，由 (6.13) 可得

$$\lim_{n\to\infty}\Big|\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\big(M_t^nG_s\big)-\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\big(M_tG_s\big)\Big|\leqslant\|G_s\|_\infty\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\big|M_t^n-M_t\big|=0. \tag{6.14}$$

同时，因为 M_t 是一个 $\mathcal{C}_T$ 上的连续泛函，且有

$$\sup_n\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}|M_tG_s|^2\overset{(6.13)}{\lesssim}\left[\sup_n\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\Big(\varrho^\delta(z_t)+\varrho^\delta(z_0)\Big)+\|f\|_{L^\infty}^2\right]\|G\|_{L^\infty}\overset{(6.8)}{<}\infty,$$

所以我们可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}^{\mathbb{P}_n}\big(M_tG_s\big)=\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\big(M_tG_s\big).$$

结合上述所有计算，我们得到了 (6.12). 至此，我们完成了广义非线性鞅问题解的存在性的结论.

(唯一性) 首先，我们证明 $K=0$ 时广义线性鞅问题解的唯一性. 取 $\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2\in\mathscr{M}_\nu(W,0)$ 是两个广义线性鞅问题的解. 取 $f\in L^\infty_T C_b(\mathbb{R}^{2d})$ 并令 u 为方程 (6.3) 唯一的拟控制解，其中 $u(t)=0$. 基于定义 6.0.1，我们有

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} u(0,z)\nu(\mathrm{d}z) = -\mathbb{E}^{\mathbb{P}_i}\int_0^T f(s,Z_s)\mathrm{d}s,\quad i=1,2,$$

从而得到

$$\int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{P}_1} f(s,Z_s)\mathrm{d}s = \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2} f(s,Z_s)\mathrm{d}s.$$

于是，对于任意的 $f\in C_b(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $t\in[0,T]$,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1} f(Z_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2} f(Z_t).$$

基于一个标准的方法 (参考 [35] 中的定理 4.4.3)，从上式可得

$$\mathbb{P}_1=\mathbb{P}_2.$$

对于一般的非线性问题解的唯一性，我们采用 Girsanov 变换的方法. 取 $\mathbb{P}_1,\mathbb{P}_2\in\mathscr{M}_\nu(W,K)$ 为两个广义非线性鞅问题的解. 令 W_n,K_n 是 W 和 K 的磨光逼近. 我们考虑下面的带有磨光系数的线性化方程：对于 $i=1,2$,

$$\mathrm{d}X^{i,n}_t = V^{i,n}_t\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}V^{i,n}_t = W_n(Z^{i,n}_t)\mathrm{d}t + (K_n*\mu^i_t)(X^{i,n}_t) + \sqrt{2}\mathrm{d}B_t, \tag{6.15}$$

其中 $\mu^i_t := \mathbb{P}_i\circ x_t^{-1}$. 正如存在性部分的证明一样，$\{Z^{i,n}\}_n$ 的概率分布是胎紧的，且由于广义线性鞅问题解的唯一性，对于 $i=1,2$ 我们有 $Z^{i,n}=(X^{i,n},V^{i,n})$ 的概率分布弱收敛到 $\mathbb{P}_i$ 当 $n\to\infty$. 特别地，对于任意的 $\varphi\in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathbf{E}\varphi(X^{i,n}_t)\to\mathbb{E}^{\mathbb{P}_i}\varphi(x_t),\quad i=1,2.$$

下面我们定义

$$A^{i,n}_t := \exp\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t (K_n*\mu^i_s)(X^{i,n}_s)\mathrm{d}B_s - \frac{1}{4}\int_0^t |(K_n*\mu^i_s)(X^{i,n}_s)|^2\mathrm{d}s\right\}.$$

因为

$$\|K_n*\mu^i_s\|_{L^\infty}\leqslant\|K\|_{L^\infty}, \tag{6.16}$$

所以通过 Girsanov 定理，在概率测度 $Q^{i,n} := A^{i,n}_T\mathbf{P}$ 下，对于 $t\in[0,T]$,

$$\widetilde{B}^{i,n}_t := \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^t (K_n*\mu^i_s)(X^{i,n}_s)\mathrm{d}s + B_t$$

仍然是一个布朗运动，并且

$$\mathrm{d}X_t^{i,n} = V_t^{i,n}\mathrm{d}t,\ \mathrm{d}V_t^{i,n} = W_n(Z_t^{i,n})\mathrm{d}t + \sqrt{2}\mathrm{d}\widetilde{B}_t^{i,n}.$$

因为上述随机微分方程有一个唯一的弱解，所以我们有

$$Q^{1,n} \circ (Z^{1,n})^{-1} = Q^{2,n} \circ (Z^{2,n})^{-1}.$$

于是，对于任意的 $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$，有

$$\mathbf{E}\varphi(X_t^{1,n}) = \mathbf{E}(A_T^{1,n}\varphi(X_t^{1,n})/A_T^{1,n}) = \mathbf{E}(A_T^{2,n}\varphi(X_t^{2,n})Y_T^n)$$

和

$$|\mathbf{E}\varphi(X_t^{1,n}) - \mathbf{E}\varphi(X_t^{2,n})| \leqslant \|\varphi\|_{L^\infty}\mathbf{E}|A_T^{2,n}Y_T^n - 1|,$$

其中

$$Y_T^n := \exp\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^T (K_n * \mu_s^1)(X_s^{2,n})\mathrm{d}B_s + \frac{1}{4}\int_0^T |(K_n * \mu_s^1)(X_s^{2,n})|^2\mathrm{d}s\right\}.$$

另一方面，因为 $t \mapsto A_t^{2,n}, Y_t^n$ 是两个半鞅，所以基于乘积 Itô 公式，我们有

$$\begin{aligned}
A_T^{2,n}Y_T^n - 1 &= \int_0^t A_s^{2,n}\mathrm{d}Y_s^n + \int_0^t Y_s^n\mathrm{d}A_s^{2,n} + [A^{2,n}, Y^n]_T \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^T A_s^{2,n}Y_s^n(K_n * \mu_s^1 - K_n * \mu_s^2)(X_s^{2,n})\mathrm{d}B_s \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_0^T A_s^{2,n}Y_s^n(|(K_n * \mu_s^1)(X_s^{2,n})|^2 - |(K_n * \mu_s^2)(X_s^{2,n})|^2)\mathrm{d}s \\
&\quad + \frac{1}{4}\int_0^T A_s^{2,n}Y_s^n|(K_n * \mu_s^1)(X_s^{2,n}) - (K_n * \mu_s^2)(X_s^{2,n})|^2\mathrm{d}s. \qquad (6.17)
\end{aligned}$$

由 (6.16)，从 BDG 不等式和 Hölder 不等式中可得对于任意的 $p \geqslant 2$ 有

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|A_t^{2,n}Y_t^n|^p &\lesssim 1 + \|K\|_{L^\infty}\mathbb{E}\left(\int_0^t |A_s^{2,n}Y_s^n|^2\mathrm{d}s\right)^{p/2} + \|K\|_{L^\infty}\int_0^t \mathbb{E}|A_s^{2,n}Y_s^n|^p\mathrm{d}s \\
&\lesssim 1 + \|K\|_{L^\infty}\int_0^t \mathbb{E}|A_s^{2,n}Y_s^n|^p\mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

进而基于 Gronwall 不等式可得

$$\sup_n \sup_{s\in[0,T]} \mathbb{E}|A_t^{2,n}Y_t^n|^p < \infty.$$

因此，由 (6.17)，BDG 不等式和 Hölder 不等式，我们得到

$$\mathbf{E}|A_T^{2,n}Y_T^n - 1| \lesssim \left(\int_0^T \|\mu_s^2 - \mu_s^1\|_{TV}^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2} + \int_0^T \|\mu_s^2 - \mu_s^1\|_{TV} \mathrm{d}s,$$

其中 $\|\cdot\|_{TV}$ 为符号测度的全变差范数. 结合上述计算，对所有的 $\varphi \in C_b(\mathbb{R}^d)$，我们有

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}\varphi(x_T) - \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}\varphi(x_T)| &= \lim_{n\to\infty} |\mathbf{E}\varphi(X_T^{1,n}) - \mathbf{E}\varphi(X_T^{2,n})| \\ &\lesssim \|\varphi\|_\infty \left(\int_0^T \|\mu_s^2 - \mu_s^1\|_{TV}^2 \mathrm{d}s\right)^{1/2},\end{aligned}$$

继而可得

$$\|\mu_T^2 - \mu_T^1\|_{TV}^2 \lesssim \int_0^T \|\mu_s^2 - \mu_s^1\|_{TV}^2 \mathrm{d}s.$$

由 Gronwall 不等式可得 $\mu_t^1 = \mu_t^2$. 最后，通过使用和广义线性鞅问题解的唯一性一样的方法 (即 [35, 定理 4.4.3])，我们得到了广义非线性鞅问题解的唯一性. 定理得证. □

第七章　奇异非线性动理学 Fokker-Planck 方程解的适定性

在本章中，我们研究非线性的奇异动理学偏微分方程. 进一步说，我们希望在额外的条件下得到 (6.1) 的唯一鞅解的边缘分布关于 Lebesgue 测度的密度，并证明其满足对应的非线性 Fokker-Planck 方程.

我们始终在本章节中固定 $T>0$，$\alpha\in(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$, $\vartheta:=\frac{9}{2-3\alpha}$ 和

$$\kappa_0<0,\quad 0\leqslant\kappa_1\leqslant 1/(2\vartheta+2),\tag{7.1}$$

且令

$$\kappa_2:=\kappa_1,\ \kappa_3:=(2\vartheta+2)\kappa_1,\ \rho_i:=\varrho^{\kappa_i},\quad i=0,1,2,3,$$

其中 ϱ 由 (3.5) 定义. 我们考虑下面的带有环境噪声 W 的非线性动理学 Fokker-Planck 方程:

$$\partial_t u=\Delta_v u-v\cdot\nabla_x u-\mathrm{div}_v(Wu-K*\langle u\rangle u),\quad u(0)=\varphi,\tag{7.2}$$

其中$u:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{2d}\to\mathbb{R}$ 是一个在时刻 t，有关位置 x 处速度为 v 的粒子的分布函数，$\langle u\rangle(t,x):=\int_{\mathbb{R}^d}u(t,x,v)\mathrm{d}v$ 代表了质量分布，$K:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$ 是一个交互核函数，且

$$K*\langle u\rangle(t,x):=\int_{\mathbb{R}^d}K(x-y)\langle u\rangle(t,y)\mathrm{d}y.$$

对于环境噪声，我们假设 $W(t,x,v)$ 满足下面条件:

$$W\in\mathbb{B}^\alpha_T(\rho_1),\ \text{其中可重整化定义中的逼近序列为 } W_n \text{ 且满足 } \mathrm{div}_v W_n\equiv 0,\tag{7.3}$$

此外，我们还始终在本章节中假设:

$$K\in\cup_{\beta>\alpha-1}\mathbf{C}^{\beta/3}.\tag{7.4}$$

注 7.0.1　(i) 对于 $\widetilde{K}(x,v)=K(x)$，基于 (B.1) 有

$$\widetilde{K}\in\mathbf{C}^\beta_a\iff K\in\mathbf{C}^{\beta/3},\quad\forall\beta\in\mathbb{R}.$$

这时，当 $K(x)=|x|^{-r}$ 其中 $r<(1-\alpha)/3$ 时，(7.4) 成立.

(ii) 因为 $\mathrm{div}_v W \equiv 0$ 且 K 不依赖于 v，所以方程 (7.5) 等价于下面的非散度形式：

$$\partial_t u = \Delta_v u - v \cdot \nabla_x u - W \cdot \nabla_v u - K * \langle u \rangle \cdot \nabla_v u, \quad u(0) = \varphi. \tag{7.5}$$

特别地，当 W 和 K 光滑时，若 φ 是一个概率测度函数，则易知解 u 也是光滑的. 由此，下面我们就可以应用第五节的结果到方程 (7.5) 中.

(iii) 注意到 $\mathrm{div}_v W \equiv 0$ 这个条件在物理中是一个很自然的条件，但在我们这里是一个很强且改变方程良定性的条件. 具体来说，当 $\mathrm{div}_v W \equiv 0$ 时，我们甚至可以不使用拟控制 calculs 来使得下面的线性动理学方程良定:

$$\partial_t u = \Delta_v u + v \cdot \nabla_x u + W \cdot \nabla_v u + f.$$

假设 $f, W \in \mathbf{C}_a^{-\alpha}$. 这时基于 $\mathrm{div}_v W \equiv 0$，我们把上述方程理解为

$$\partial_t u = \Delta_v u + v \cdot \nabla_x u + \mathrm{div}_v(u \succcurlyeq W) + W \succ \nabla_v u + f. \tag{7.6}$$

这时由 Schauder 估计可知 $u \in \mathbf{C}_a^{2-\alpha}$, 且上述方程中的每一项都是良定的，即，由 (2.39) 和 (2.40)，

$$\mathrm{div}_v(u \succcurlyeq W) : \mathbf{C}_a^{2-\alpha} \times \mathbf{C}^{-\alpha} \to \mathbf{C}^{1-2\alpha} \subset \mathbf{C}_a^{-\alpha}, \quad 因为\ 2 - 2\alpha > 0;$$

由 (2.38)，

$$W \succ \nabla u : \mathbf{C}_a^{-\alpha} \times (\mathbf{C}^{1-\alpha} \subset L^\infty) \to \mathbf{C}^{-\alpha} \subset \mathbf{C}_a^{-\alpha}, \quad 因为\ 1 - \alpha > 0.$$

由于本节可以看作是第五节的应用, 我们依然使用拟控制计算的方法定义解并研究拟控制解. 关于 $\alpha \in (0,1)$ 和 $\mathrm{div}_v W \equiv 0$ 的情况，我们会在未来的工作中进行进一步的研究方程 (7.6).

注意到 (7.5) 中的动理学算子和 (5.1) 中的互为共轭关系，为了使用第 五 章研究的动理学方程的拟控制解来定义非线性方程 (7.5) 的解，我们首先介绍下面的速度反转算子：对于 $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^{2d}), \varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^{2d})$

$$\tau f(\varphi) := f(\tau\varphi) \qquad \tau\varphi(x, v) := \varphi(x, -v).$$

明显地，该速度反转算子不会改变 Besov 范数. 下面，我们给出带有奇异环境噪声的非线性动理学 Fokker-Planck 方程的拟控制概率密度解的定义.

定义 7.0.1 我们称 $u \in \mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)$ 为方程 (7.5) 的一个拟控制概率密度解，若 τu 是 (5.1) 关于 $(b,f)=(\tau W+K*\langle u\rangle,0)$ 的一个拟控制解，其中 $\lambda=0$ 且初值为 $\tau\varphi$，并且 u 满足

$$u \geqslant 0, \quad \int_{\mathbb{R}^{2d}} u(t,z)\mathrm{d}z = 1, \quad t\in[0,T].$$

注 7.0.2 令 u 是方程 (7.5) 的一个拟控制概率密度解. 类似 (6.2) 的计算，在 (7.3) 和 (7.4) 的条件假设下，由引理 4.1.1 可得 $b=\tau W+K*\langle u\rangle \in \mathbb{B}^{\alpha}_{T}(\rho_1)$，其定义中的逼近序列可选为

$$b_n = \tau W_n + K_n * \langle u\rangle \ \ \text{且}\ \mathrm{div}_v b_n \equiv 0,$$

其中 $K_n = K*\phi_n$，ϕ_n 为经典的磨光子函数.

对于一个概率密度解 u，非线性项 $K*\langle u\rangle$ 在 $\mathbf{C}^{\beta/3}$ 中的有界性是显然的. 为了得到这样的概率密度解，我们首先使用磨光逼近，考虑以 b_n 为系数的方程. 但这时，我们不仅需要证明磨光解序列在动理学 Hölder 空间中是紧的，而且需要证明其在 L^1 空间中也是紧的. 这时，定理 5.3.1 的一致估计是不足够的，为此我们在本章使用基于能量方法的熵估计得到逼近序列在 L^1 空间的紧性. 对于唯一性，涉及 L^1 的估计更为深入. 对于非线性项，我们需要解的速度梯度关于 $L^2_tL^1$ 范数的一致估计. 可以观察到该范数的估计可以由熵估计中的 Fisher 信息量控制，因此这里对于带有奇异噪声的动理学 Fokker-Planck 方程建立熵估计对于解决我们方程 (7.5) 的存在唯一性是有效的方法，且其本身亦是有意义的.

给定一个概率密度函数 f，称 f 有一个有限熵，若

$$H(f) := \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(z)\ln f(z)\mathrm{d}z \in (-\infty,\infty).$$

本章主要的结论是下面的适定性定理.

定理 7.0.1 假设 (7.1)，(7.3) 和 (7.4) 成立. 取 $\gamma > 1+\alpha$.
(存在性) 对于任意的概率密度函数 $\varphi \in L^1(\rho_0)\cap \mathbf{C}^{\gamma}_a$，存在至少一个方程 (7.5) 的拟控制概率密度解 $u \in \mathbb{S}^{2-\alpha}_{T,a}(\rho_3)$. 此外，存在一个常数 $C>0$ 使得对于所有的 $t\in[0,T]$，

$$\|u(t)\|_{L^1(\rho_0)} \leqslant C\|\varphi\|_{L^1(\rho_0)} \tag{7.7}$$

这时若 $|H(\varphi)|<\infty$，则下式成立

$$H(u(t)) + \|\nabla_v u\|^2_{L^2_tL^1_z} \leqslant H(\varphi), \tag{7.8}$$

且

$$|H(u(t))| + \|\nabla_v u\|^2_{L^2_t L^1_z} \leqslant H(\varphi) + C(\|\varphi\|_{L^1(\rho_0)} + 1). \tag{7.9}$$

(稳定性) 如果进一步假设 K 是有界,那么对于任意的满足 $H(\varphi_1) < \infty$ 的 $\varphi_1, \varphi_2 \in L^1(\rho_0) \cap \mathbf{C}^\gamma_a$，和任意的初值分别为 φ_1，φ_2 的拟控制概率密度解 u_1，u_2，存在一个只依赖于 $\|K\|_{L^\infty}$，$\|\varphi_1\|_{L^1(\rho_0)}$，$H(\varphi_1)$ 和 $\|\mathrm{e}^{-\rho_0}\|_{L^1}$ 的常数 $C > 0$ 使得对于所有的 $t \in [0, T]$,

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_{L^1} \leqslant \mathrm{e}^{Ct} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^1}. \tag{7.10}$$

特别地, 这时带有奇异环境噪声的非线性动理学 Fokker-Planck 方程 (7.2) 拥有唯一的拟控制概率密度解 u，且此解为平均场方程 (6.1) 在定义 6.0.1 下的唯一广义非线性鞅问题解关于 Lebesgue 测度的时间边缘分布密度, 即对于 $\mathbb{P} \in \mathscr{M}_\nu(W, K)$, 有 $u(t, z) = \frac{\mathbb{P} \circ z_t^{-1}}{\mathrm{d}z}(z)$.

注 7.0.3 $\varphi \in L^1(\rho_0)$ 是一个矩有限的条件，即

$$\int_{\mathbb{R}^{2d}} |z|^{|\kappa_0|} \varphi(z) \mathrm{d}z < \infty.$$

此条件在熵估计中是普遍需要的 (参考 [61])，也可以从下面的引理 7.0.1 中看出该条件的必要性.

我们首先介绍下面的与熵有关的初等结果.

引理 7.0.1 对于任意的可测函数 $\phi, f \geqslant 0$, $\delta \in [0, 1)$ 和 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$，有下式成立

$$\int \phi |f \ln(f + \delta)| \leqslant \int \phi f \ln(f + \delta) + 2\Big(\int \phi \rho f + \int \phi \mathrm{e}^{-\rho} \Big).$$

证明 根据 Young 不等式可得

$$-r \ln(r + \delta) \leqslant -r \ln r \leqslant ar + \mathrm{e}^{-a}, \quad \forall r \in [0, 1], \quad a \geqslant 0.$$

于是,

$$|r \ln(r + \delta)| = r \ln(r + \delta) - 2r \ln(r + \delta) \mathbb{1}_{\{0 < r \leqslant 1 - \delta\}} \leqslant r \ln(r + \delta) + 2(ar + \mathrm{e}^{-a}).$$

在上式中取 $a = \rho$，所需估计由此可得. 证毕. □

对于光滑系数的方程我们不加证明地给出下面的经典结果 (参考 [93]).

引理 7.0.2 令 $b \in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ 和 $Z_t^{z_0} = (X_t, V_t)$ 为下面随机微分方程的唯一强解：

$$\mathrm{d}X_t = V_t \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}V_t = \sqrt{2}\mathrm{d}B_t + b(t, X_t, V_t)\mathrm{d}t,\quad (X_0, V_0) = z_0 \in \mathbb{R}^{2d}. \tag{7.11}$$

则对于任意给定的初始概率测度 μ_0，

$$\mu(t, \mathrm{d}z) = \int_{\mathbb{R}^{2d}} \mathbf{P}(Z_t^{z_0} \in \mathrm{d}z)\mu_0(\mathrm{d}z_0)$$

是下面 Fokker-Plance 方程在分布意义下的唯一解：

$$\partial_t \mu = \Delta_v \mu - v \cdot \nabla_x \mu - \mathrm{div}_v(b\mu),\quad \mu(0) = \mu_0.$$

现在我们给出下面先验的能量估计和熵估计. 我们将对此的证明分为三部分. 首先对于给定的解 u 我们可以找到一个线性化的逼近，继而可以使用定理 5.3.1. 其次，我们基于类似证明 (6.8) 的 Itô-Tanaka 技巧来给出估计 (7.7). 最终，我们熵方法来证明 (7.8) 和 (7.9).

引理 7.0.3 在条件 (7.3) 成立的假设下，令 $u \in \mathbb{S}_{T,a}^{2-\alpha}(\rho_3)$ 为方程 (7.5) 以 $\varphi \in L^1(\rho_0) \cap \mathbf{C}_a^\gamma$ 为初值的一个拟控制概率密度解. 则，(7.7) 成立. 此外，若 $H(\varphi) < \infty$，则 (7.8) 和 (7.9) 满足.

证明 (步骤 1) 取 $b_n \in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ 为注 7.0.2 中的逼近序列和 $\varphi_n = \varphi * \phi_n$ 为基于经典磨光子 ϕ_n 的关于 φ 的磨光逼近. 因为 $b_n \in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$，所以对于下面的磨光方程显然有一个唯一的概率密度解 $u_n \in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$：

$$\partial_t u_n = \Delta_v u_n - v \cdot \nabla_x u - \tau b_n \cdot \nabla_v u_n = \Delta_v u_n - v \cdot \nabla_x u_n - \mathrm{div}_v(\tau b_n u_n), \tag{7.12}$$

其中 $u_n(0) = \varphi_n$. 显然也有 τu_n 满足下面的方程：

$$\partial_t \tau u_n = \Delta_v \tau u_n + v \cdot \nabla_x \tau u_n + b_n \cdot \nabla_v \tau u_n.$$

由 (5.44) 和 b_n 的定义，从定理 5.3.1 中可得对于某些 $\rho \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 和 $\beta \in (\alpha, 2)$，有

$$\lim_{n\to\infty} \|\tau u_n - \tau u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{2-\beta}(\rho)} = 0,$$

进一步得到

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{2-\beta}(\rho)} = 0. \tag{7.13}$$

为了证明 (7.7)，(7.8) 和 (7.9)，只需要证明存在一个与 n 无关的常数 $C>0$ 使得

$$\|u_n(t)\|_{L^1(\rho_0)} \lesssim_C \|\varphi_n\|_{L^1(\rho_0)} \lesssim_C \|\varphi\|_{L^1(\rho_0)}, \tag{7.14}$$

且如果 $H(\varphi)<\infty$，那么

$$H(u_n(t)) + \|\nabla_v u_n\|^2_{L^2_t L^1} \leqslant H(\varphi_n). \tag{7.15}$$

事实上,明显地可以由 (7.14) 和 Fatou 引理得到 (7.7). 现在我们给出如何从 (7.15) 和 (7.14) 得到 (7.8) 和 (7.9) 的证明. 首先，因为 $r\mapsto r\log r$ 是 $[0,\infty)$ 上的凸函数且 $H(\varphi)<\infty$，所以由 Jensen 不等式，我们有

$$H(\varphi_n) = H(\varphi * \phi_n) \leqslant H(\varphi), \tag{7.16}$$

并且由 $u\mapsto \|\nabla_v u\|_{L^2_t L^1}$ 的下半连续性，有

$$\|\nabla_v u\|_{L^2_t L^1} \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|\nabla_v u_n\|_{L^2_t L^1}. \tag{7.17}$$

另一方面，令 $\kappa_0<\kappa<0$ 和 $\rho:=\varrho^\kappa$. 回顾 (3.5) 的定义和 $\rho_0=\varrho^{\kappa_0}$，则对于任意的 $R>0$，我们有

$$\begin{aligned}\|u_n(t)-u(t)\|_{L^1(\rho)} &\leqslant \int |u_n(t,z)-u(t,z)|\cdot \mathbb{1}_{\{|z|_a\leqslant R\}}\cdot\rho(z)\mathrm{d}z\\ &\quad + \int |u_n(t,z)-u(t,z)|\cdot \mathbb{1}_{\{|z|_a> R\}}\cdot\rho(z)\mathrm{d}z\\ &\leqslant \int |u_n(t,z)-u(t,z)|\cdot \mathbb{1}_{\{|z|_a\leqslant R\}}\cdot\rho(z)\mathrm{d}z\\ &\quad + C\sup_n \|u_n(t)\|_{L^1(\rho_0)}/R^{\kappa-\kappa_0},\end{aligned}$$

继而可先取 $n\to\infty$ 再取 $R\to\infty$ 得到

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n-u\|_{L^\infty_T L^1(\rho)} = 0. \tag{7.18}$$

现在我们定义关于非负可测函数 f 的相对熵:

$$H_\rho(f) := \int f\ln(f\mathrm{e}^\rho) = H(f) + \|f\|_{L^1(\rho)}. \tag{7.19}$$

因为对于所有的 $r\geqslant 0$ 有 $r(\ln r-1)\geqslant -1$，所以我们可以得到

$$\inf_n u_n(t)\big(\ln(u_n(t)\mathrm{e}^\rho)-1\big) \geqslant -\mathrm{e}^{-\rho} \in L^1,$$

进一步基于 Fatou 引理有

$$H_\rho(u(t))-1\leqslant\varliminf_{n\to\infty}\int u_n(t)\mathrm{e}^{\rho}\big(\ln(u_n(t)\mathrm{e}^{\rho})-1\big)\mathrm{e}^{-\rho}=\varliminf_{n\to\infty}H_\rho(u_n(t))-1.$$

联立上式，(7.18) 和 (7.19) 可得

$$H(u(t))\leqslant\varliminf_{n\to\infty}H(u_n(t)).$$

结合上式和 (7.15)-(7.17)，我们得到了 (7.8). 此外，根据 (7.7)，(7.8) 和引理 7.0.1，(7.9) 成立.

(步骤 2) 在第 2 步中，基于类似证明 (6.8) 的技巧，我们将通过证明有关随机微分方程 (7.11) 解的矩估计来证明 (7.14). 为了方便，我们在下面的论证中去掉所有的下角标 n. 根据引理 7.0.2，有

$$\|u(t)\|_{L^1(\rho_0)}=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\mathbf{E}\rho_0(Z_t^{z_0})\varphi(z_0)\mathrm{d}z_0,$$

其中 $Z_t^{z_0}=(X_t,V_t)$ 是随机微分方程 (7.11) 关于 $b=\tau b_n$ 的唯一解. 于是，为了证明 (7.14)，只需证明对于一个与 n 无关的常数 $C>0$ 有

$$\mathbf{E}\rho_0(Z_t^{z_0})\lesssim_C\rho_0(z_0),\quad\forall z_0\in\mathbb{R}^{2d}.\tag{7.20}$$

这里我们使用和证明 (6.8) 完全一样的方法. 基于 Itô 公式我们有

$$\mathbf{E}\rho_0(Z_t^{z_0})=\rho_0(z_0)+\mathbf{E}\int_0^t(\Delta_v\rho_0+v\cdot\nabla_x\rho_0)(Z_s^{z_0})\mathrm{d}s+\mathbf{E}\int_0^t(b\cdot\nabla_v\rho_0)(s,Z_s^{z_0})\mathrm{d}s.$$

由 (3.7) 和 Gronwall 不等式，我们只需要估计

$$\mathbf{E}\int_0^t(b\cdot\nabla_v\rho_0)(s,Z_s^{z_0})\mathrm{d}s.$$

为此，我们使用定理 5.3.1，对于固定的 $t\in[0,T]$，令 w^t 为下面倒向偏微分方程的唯一经典解:

$$\partial_s w^t+(\Delta_v+v\cdot\nabla_x+b\cdot\nabla_v)w^t=b\cdot\nabla_v\rho_0,\quad w^t(t)=0.$$

再次基于 Itô 公式，我们有

$$0=\mathbf{E}w^t(t,Z_t^{z_0})=w^t(0,z_0)+\mathbf{E}\int_0^t(b\cdot\nabla_v\rho_0)(s,Z_s^{z_0})\mathrm{d}s.\tag{7.21}$$

类似 (6.8) 的估计，取 $\beta\in(\alpha,1)$ 并定义 $\rho_4:=(\rho_0\varrho)^{-1}$，这时我们有

$$\|\nabla_v\rho_0\|_{\mathbf{C}_a^\beta(\rho_4)}<\infty,\quad\|b\cdot\nabla_v\rho_0\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{-\alpha}(\rho_1\rho_4)}\lesssim\|b\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{-\alpha}(\rho_1)}.$$

同时，由引理 4.1.3 可得

$$\begin{aligned}&\|b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda(b\cdot\nabla_v\rho_0)\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1^2\rho_4)}\\&\qquad\lesssim\|b\circ\nabla_v\mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1^2)}\|\nabla_v\rho_0\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_4)}+\|b\|^2_{\mathbb{C}^{-\alpha}_{T,a}(\rho_1)}\|\nabla_v\rho_0\|_{\mathbf{C}^\beta_a(\rho_4)}.\end{aligned}$$

因为 $(2\vartheta+2)\kappa_1\leqslant 1$ 和 $\rho_1=\varrho^{\kappa_1}$, $\rho_4=\varrho^{-\kappa_0-1}$，所以基于定理 5.3.1 我们有

$$\|w^t\|_{\mathbb{L}^\infty_T(\rho_0^{-1})}\lesssim\mathbb{A}^{b,b\cdot\nabla_v\rho_0}_{T,\infty}(\rho_1,\rho_1\rho_4)<\infty,$$

进而对于一个于 n 和 z_0 无关的常数 $C_1>0$ 有

$$|w^t(0,z_0)|\leqslant C_1\rho_0(z_0).$$

将其代入 (7.21)，我们便得到了 (7.20).

(步骤 3) 在这一步中，我们将使用熵方法证明 (7.15). 回顾由 (3.24) 定义的截断函数 χ. 对于 $\delta\in(0,1)$ 和 $R\geqslant 1$，定义

$$\beta_\delta(r):=r\ln(r+\delta),\quad\chi_R(x,v):=\chi\big(\tfrac{x}{R^3},\tfrac{v}{R}\big).$$

因为 u 是方程 (7.12) 的光滑解，由求导链式法则可得

$$\partial_t\beta_\delta(u)=\Delta_v\beta_\delta(u)-v\cdot\nabla_x\beta_\delta(u)-b\cdot\nabla_v\beta_\delta(u)-\beta''_\delta(u)|\nabla_v u|^2.$$

在上式两边同乘函数 χ_R，再进行区域 $[0,t]\times\mathbb{R}^{2d}$ 上的积分，由分布积分公式和$\mathrm{div}_v b=0$，我们有

$$\begin{aligned}&\int\chi_R\beta_\delta(u(t))-\int\chi_R\beta_\delta(\varphi)+\int_0^t\int\chi_R\beta''_\delta(u)|\nabla_v u|^2\\&\quad=\int_0^t\int\Big(\Delta_v\chi_R+v\cdot\nabla_x\chi_R+b\cdot\nabla_v\chi_R\Big)\beta_\delta(u)\\&\quad\leqslant\|\Delta_v\chi_R+v\cdot\nabla_x\chi_R+b\cdot\nabla_v\chi_R\|_{\mathbb{L}^\infty_T}\int_0^t\int\chi_{2R}|\beta_\delta(u)|\\&\quad\leqslant C_\chi(1+\|b\|_{L^\infty})R^{-1}\int_0^t\int\chi_{2R}|\beta_\delta(u)|,\end{aligned}\tag{7.22}$$

其中常数 C_χ 只依赖于 χ. 对于 $m\in\mathbb{N}$，定义

$$G^m_R(t):=\int\chi_{2^mR}|\beta_\delta(u(t))|.$$

注意到 $\beta''_\delta\geqslant 0$，则由引理 7.0.1，(7.22) 和 (7.14) 可得

$$G^m_R(t)\leqslant\int\chi_{2^mR}\beta_\delta(u(t))+2\left(\int u(t)\rho_0+\int\mathrm{e}^{-\rho_0}\right)$$

$$\leqslant \frac{C_b}{2^m R}\int_0^t G_R^{m+1}(s)\mathrm{d}s + \int |\beta_\delta(\varphi)| + C(\|\varphi\|_{L^1(\rho_0)}+1)$$
$$\leqslant \frac{C_b}{R}\int_0^t G_R^{m+1}(s)\mathrm{d}s + A_0,$$

其中 $C_b := C_\chi(1+\|b\|_{L^\infty})$ 和

$$A_0 := \int |\beta_\delta(\varphi)| + C(\|\varphi\|_{L^1(\rho_0)}+1) \leqslant \int |\varphi\ln\varphi| + 1 + C(\|\varphi\|_{L^1(\rho_0)}+1) < \infty.$$

这里的不等式来自于下面的放缩

$$|\beta_\delta(r)| \leqslant |r\log r| + r, \quad \delta\in(0,1), \quad r\geqslant 0, \tag{7.23}$$

由此迭代下去，我们得到对于任意的 $m\in\mathbb{N}$，

$$G_R^0(t) \leqslant A_0\sum_{k=0}^{m-1}\frac{C_b^k t^k}{R^k k!} + \frac{C_b^m}{R^m}\int_0^t\int_0^{t_1}\cdots\int_0^{t_{m-1}} G_R^m(t_m)\mathrm{d}t_m\cdots\mathrm{d}t_1.$$

因为 $u\in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$，所以存在一个常数 $C_\delta>0$ 使得对于所有的 $R\geqslant 1$，

$$G_R^m(t) \leqslant C_\delta\int\chi_{2^m R} \leqslant C_\delta(2^m R)^{2d}.$$

因此，

$$G_R^0(t) \leqslant A_0\mathrm{e}^{C_b t/R} + \frac{C_b^m}{R^m}C_\delta(2^m R)^{2d}\frac{t^m}{m!},$$

进一步通过先取 $m\to\infty$ 再取 $R\to\infty$ 得到

$$\int |\beta_\delta(u(t))| = \lim_{R\to\infty} G_R^0(t) \leqslant A_0 = \int |\beta_\delta(\varphi)| + C(\|\varphi\|_{L^1(\rho_0)}+1) < \infty. \tag{7.24}$$

于是，我们在 (7.22) 中两边同时令 $R\to\infty$ 可得

$$\int \beta_\delta(u(t)) + \int_0^t\int \beta_\delta''(u(s))|\nabla_v u(s)|^2\mathrm{d}s \leqslant \int \beta_\delta(\varphi). \tag{7.25}$$

由 (7.24)，(7.23) 和 Fatou 引理，我们进一步得到

$$\int |u(t)\ln(u(t))| \leqslant \int |\varphi\ln\varphi| + C(\|\varphi\|_{L^1(\rho_0)}+1) < \infty, \tag{7.26}$$

令 (7.25) 中的 $\delta\downarrow 0$，由 $\beta_\delta''(r) = \frac{1}{r+\delta} + \frac{\delta}{(r+\delta)^2}$，控制收敛定理和 Fatou 引理可得

$$\int u(t)\ln(u(t)) + \int_0^t\int \frac{|\nabla_v u(s)|^2}{u(s)}\mathrm{d}s \leqslant \int \varphi\ln\varphi. \tag{7.27}$$

这里控制收敛定理可以使用是基于 (7.26) 和 (7.23). 另一方面，由 Hölder 不等式，我们有

$$\int_0^t \|\nabla_v u(s)\|_{L^1}^2\mathrm{d}t \leqslant \int_0^t\left(\|u(s)\|_{L^1}\int\frac{|\nabla_v u(s)|^2}{u(s)}\right)\mathrm{d}s = \int_0^t\left(\int\frac{|\nabla_v u(s)|^2}{u(s)}\right)\mathrm{d}s.$$

将其代入 (7.27) 可得 (7.15). 综上，引理得证. □

在得到上面的先验估计的引理之后，我们现在可以给出定理 7.0.1 的证明.

证明 (**定理** 7.0.1 **的证明**)　(**存在性**) 由我们拟控制概率密度解的定义，我们只需要对下面的关于共轭动理学算子的方程得到解即可：

$$\partial_t u = \Delta_v u + v \cdot \nabla_x u + \tau W \cdot \nabla_v u + K * \langle u \rangle \cdot \nabla_v u, \quad u(0) = \tau\varphi. \tag{7.28}$$

令 $W_n \in L_T^\infty C_b^\infty(\mathbb{R}^{2d})$ 为 (7.3) 中的逼近函数. 取 $\phi_n(x) = n^d \phi_1(nx)$ 是经典的磨光子函数并定义 $K_n := K * \phi_n \in C_b^\infty(\mathbb{R}^d)$. 因为上述系数都是有界 Lipschitz 的且 $\mathrm{div}_v W_n = \mathrm{div}_v K_n = 0$，基于 Itô 公式和 superposition principle (参考 [6, 第 2 节])，下面 Fokker-Planck 方程有唯一性的光滑概率密度解 u_n，且其是随机微分方程 (6.4) 的时间边缘分布关于 Lebesgue 测度的密度：

$$\partial_t u_n = \Delta_v u_n + v \cdot \nabla_x u_n + (\tau W_n + K_n * \langle u_n \rangle) \cdot \nabla_v u_n, \quad u_n(0) = \tau\varphi_n. \tag{7.29}$$

定义

$$b_n(t,x,v) := \tau W_n(t,x,v) + K_n * \langle u_n \rangle(t,x).$$

因为对于 $\beta > (\alpha-1)/3$ 有

$$\|K_n * \langle u_n \rangle\|_{\mathbf{C}^\beta} \leqslant \|K_n\|_{\mathbf{C}^\beta} \|\langle u_n \rangle\|_{L^1} \leqslant \|K\|_{\mathbf{C}^\beta} \|u_n\|_{L^1} \lesssim 1,$$

所以由 (2.40)，(3.34)，(3.38) 和注 7.0.1 可得

$$\|b_n \circ \nabla_v \mathscr{I}(K_n * \langle u_n \rangle)\|_{\mathbf{C}_a^{3\beta+1-\alpha}(\rho_1)} \lesssim \|b_n\|_{\mathbf{C}_a^{-\alpha}(\rho_1)} \|K_n * \langle u_n \rangle\|_{\mathbf{C}_a^{3\beta}} \lesssim 1,$$

其中不等式中具体的常数与 n 无关. 于是，由定义可得

$$\sup_n \ell_T^{b_n}(\rho_1) \lesssim \sup_n \left(\ell_T^{W_n}(\rho_1) + \ell_T^{K_n * \langle u_n \rangle}(1) + \sum_{i=1}^d \mathbb{A}_{T,\infty}^{W_n, K_n^i * \langle u_n \rangle}(\rho_1, 1) \right) < \infty,$$

并且基于定理 5.3.1 和 (5.8)，有

$$\sup_n \left(\|u_n\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{2-\alpha}(\rho_3)} + \|u_n^\sharp\|_{\mathbb{C}_{T,a}^{3-2\alpha}(\rho_4)} \right) < \infty.$$

因此，根据引理 3.2.1，存在 $u \in \mathbb{S}_{T,a}^{2-\alpha}(\rho_3)$ 和一个子列 n_k 使得对于任意的 $\beta > \alpha$ 和满足 $\lim_{z\to\infty}(\rho_5/\rho_3)(z) = 0$ 的 $\rho_5 \in \mathscr{P}_{\mathrm{w}}$ 有

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{n_k} - u\|_{\mathbb{S}_{T,a}^{2-\beta}(\rho_5)} = 0.$$

与定理 5.3.1 的证明中类似，我们有 $u^\sharp := u - P_t\varphi - \nabla_v u \prec \mathscr{I} b \in \mathbb{C}^{3-2\alpha}_{T,a}(\rho_4)$ 且对于某些 $\rho_6 \in \mathscr{P}_{\rm w}$ 和任意的 $\beta > \alpha$，有

$$\lim_{k\to\infty} \|u^\sharp_{n_k} - u^\sharp\|_{\mathbb{C}^{3-2\beta}_{T,a}(\rho_6)} = 0.$$

基于 (7.18) 中一样的计算，我们有

$$\lim_{k\to\infty} \|u_{n_k} - u\|_{L^\infty_T L^1} = 0.$$

特别地，基于定理 6.0.1，存在至少一个 $\mathbb{P} \in \mathscr{M}_\nu(W,K)$，且

$$u \geqslant 0, \quad \int u(t,z) \equiv 1, \quad u(t,z) = \frac{\mathbb{P}\circ(z_t)^{-1}}{\mathrm{d}z}(z). \tag{7.30}$$

因为 $K \in \mathbf{C}^\beta_a$ 对于 $\beta > \alpha - 1$ 成立，所以

$$\|K * \langle u_{n_k}\rangle - K * \langle u\rangle\|_{\mathbb{C}^\beta_{T,a}} \to 0 \quad 当k \to \infty.$$

令 $\varepsilon = (\beta - \alpha + 1)/2 > 0$. 由 (2.31) 可得

$$\|K_n * \langle u_n\rangle - K * \langle u_n\rangle\|_{\mathbb{C}^{\alpha-1+\varepsilon}_a} \lesssim n^{-\varepsilon}\|K\|_{\mathbf{C}^\beta} \to 0 \quad 当n \to \infty,$$

继而有

$$\|b_n \circ \nabla \mathscr{I}_\lambda b_n - b \circ \nabla \mathscr{I}_\lambda b\|_{\mathbb{C}^{1-2\alpha}_{T,a}(\rho_1^2)} \to 0.$$

这时在逼近方程 (7.29) 中对 $n \to \infty$ 取极限可得 u 确实是方程 (7.28) 的一个拟控制概率密度解.

(稳定性) 由解的定义可知只想对方程 (7.28) 得到解的稳定性结果. 令 u_1, u_2 为两个分别以 φ_1 和 φ_2 为初值的(7.5) 的拟控制概率密度解. 对于 $i = 1, 2$，令 u^n_i 为下面线性化后的磨光逼近方程的解

$$\partial_t u^n_i = \Delta_v u^n_i + v \cdot \nabla_x u^n_i + (\tau W_n + K_n * \langle u_i\rangle) \cdot \nabla_v u^n_i, \ u^n_i(0) = \varphi^n_i,$$

其中 $\varphi^n_i = \varphi_i * \phi_n$ 和 W_n 为 (7.3) 中的逼近函数，且 $K_n = K * \phi_n$. 由 (5.44)，对于某些 $\rho \in \mathscr{P}_{\rm w}$ 我们有

$$\lim_{n\to\infty} \|u^n_i - u_i\|_{\mathbb{L}^\infty_T(\rho)} = 0, \quad i = 1, 2. \tag{7.31}$$

定义

$$w_n := u^n_1 - u^n_2, \quad w := u_1 - u_2,$$

和

$$b_n := \tau W_n + K_n * \langle u_2 \rangle, \quad f_n := K_n * \langle w \rangle \cdot \nabla_v u_1^n,$$

且对任意的 $\delta > 0$,

$$\tilde{\beta}_\delta(r) := \sqrt{r^2+\delta} - \sqrt{\delta}, \quad \chi_R(x,v) := \chi\big(\tfrac{x}{R^3}, \tfrac{v}{R}\big)$$

这时容易看出

$$\partial_t w_n = \Delta_v w_n + v \cdot \nabla_x w_n + b_n \cdot \nabla_v w_n + f_n,$$

则基于与 (7.22) 类似的分析，由求导链式法则和分布积分公式可得

$$\begin{aligned}\partial_t \int \chi_R \tilde{\beta}_\delta(w_n) = \int (\Delta_v \chi_R - v \cdot \nabla_x \chi_R) \tilde{\beta}_\delta(w_n) - \int \chi_R \tilde{\beta}''_\delta(w_n) |\nabla_v w_n|^2 \\ - \int (b_n \cdot \nabla_v \chi_R) \tilde{\beta}_\delta(w_n) + \int f_n \chi_R \tilde{\beta}'_\delta(w_n).\end{aligned}$$

因为 $|\tilde{\beta}_\delta(r)| \leqslant |r|$, $|\tilde{\beta}'_\delta(r)| \leqslant 1$ 和 $\int |w_n| \leqslant 2$, 所以存在一个与 R 无关的常数 $C > 0$ 使得

$$\partial_t \int \chi_R \tilde{\beta}_\delta(w_n) \leqslant C(R^{-2} + \|b_n\|_{L^\infty} R^{-1}) + \int |f_n| \chi_R.$$

将上式关于时间从 0 到 t 进行积分，且先后令 $R \to \infty$ 和 $\delta \to 0$，我们有

$$\|w_n(t)\|_{L^1} \leqslant \|w_n(0)\|_{L^1} + \int_0^t \|f_n\|_{L^1} \mathrm{d}s.$$

注意到由 Hölder 不等式有

$$\begin{aligned}\int_0^t \|f_n\|_{L^1} \mathrm{d}s &\leqslant \int_0^t \|K_n * \langle w \rangle\|_{L^\infty} \|\nabla_v u_1^n\|_{L^1} \mathrm{d}s \\ &\leqslant \|K\|_{L^\infty} \left(\int_0^t \|w\|_{L^1}^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}} \|\nabla_v u_1^n\|_{L_t^2 L^1}.\end{aligned}$$

又因为 τ 算子不改变熵的值，所以 (7.15)，(7.16) 和 (7.26) 对于 u_n 也成立，进而有

$$\|\nabla_v u_1^n\|_{L_t^2 L^1} \leqslant H(\varphi_1^n) - H(u_1^n(t)) \lesssim_C \int |\varphi_1 \ln \varphi_1| + (\|\varphi_1\|_{L^1(\rho_0)} + 1),$$

其中的常数 C 只依赖于 ρ_0. 因此，

$$\|w_n(t)\|_{L^1} \leqslant \|w_n(0)\|_{L^1} + C_{K,\varphi_1,\rho_0} \left(\int_0^t \|w(s)\|_{L^1}^2 \mathrm{d}s \right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $n \to \infty$，基于 (7.31) 和 Fatou 引理，我们有

$$\|w(t)\|_{L^1} \leqslant \|w(0)\|_{L^1} + C_{K,\varphi_1,\rho_0}\left(\int_0^t \|w(s)\|_{L^1}^2 \mathrm{d}s\right)^{\frac{1}{2}},$$

进一步由 Gronwall 不等式可以得到 (7.10). 稳定性得证. 最后，由定理 6.0.1 中广义非线性鞅问题解的唯一性和 (7.30) 可知该鞅问题的唯一解的时间边缘分布关与 Lebesgue 测度有密度 u_t，为对应的非线性动理学 Fokker-Planck 方程 (7.2) 的唯一拟控制概率密度解. 定理证毕. □

附录 A 动理学方程的极大值原理

在本节中，我们使用 [24] 中的方法去证明动理学算子 $\mathscr{L}_\lambda$ 的极大值估计.

定理 A.0.1 取 $\lambda \geqslant 0$ 和 $b(t,x,v)$ 为一个有界可测函数. 对于 $T>0$，令 $u(t,x,v) \in \mathbf{C}_b([0,T]\times\mathbb{R}^{2d})$ 满足下面的方程：对于 Lebesgue 几乎处处所有的 $t\in(0,T]$，

$$\mathscr{L}_\lambda u - b\cdot\nabla_v u \geqslant 0, \quad u(0,x,v)\geqslant 0 \qquad \forall (x,v)\in\mathbb{R}^{2d}.$$

假设对于每一个 $t\in(0,T]$ 和 $x,v\in\mathbb{R}^d$，映射

$$(t,x,v)\to\nabla_x u(t,x,v), \nabla_v u(t,x,v) \;\text{ 和 }\; \Delta_v u(t,x,v)$$

是连续的. 则有

$$u(t,x,v)\geqslant 0, \quad \forall (t,x,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2d}. \tag{A.1}$$

证明 首先, 我们假设对于所有的 $(t,x,v)\in(0,T]\times\mathbb{R}^{2d}$,

$$\mathscr{L}_\lambda u(t,x,v) - b\cdot\nabla_v u(t,x,v)\geqslant\delta>0 \;\text{ 且 }\; \lim_{|(x,v)|\to\infty}\inf_{t\in(0,T]} u(t,x,v)=+\infty, \tag{A.2}$$

其中 $\mathscr{L}_\lambda u(t,x,v) - b\cdot\nabla_v u(t,x,v)\geqslant\delta$ 意味着对于所有的 $0\leqslant s<t\leqslant T$，有

$$u(t)-u(s)-\int_s^t\Big(\Delta_v-\lambda-v\cdot\nabla_x+b\cdot\nabla_v\Big)u(r)\mathrm{d}r\geqslant\delta(t-s). \tag{A.3}$$

假设 (A.1) 不成立. 则存在一个点 $(t_0,x_0,v_0)\in(0,T]\times\mathbb{R}^{2d}$ 使得

$$u(t_0,x_0,v_0)=\inf_{(t,x,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2d}} u(t,x,v)<0.$$

记 $L_s u(r,x,v) := (\Delta_v-\lambda-v\cdot\nabla_x+b(s)\cdot\nabla_v)\,u(r,x,v)$. 则我们有

$$L_{t_0}u(t_0,x_0,v_0)\geqslant 0$$

且基于 (A.3)，对任意的 $t\in(0,t_0)$，

$$u(t_0,x_0,v_0)-u(t,x_0,v_0)\geqslant\delta(t_0-t)+\int_t^{t_0}\Big(L_r u(r,x_0,v_0)-L_r u(t_0,x_0,v_0)\Big)\mathrm{d}r. \tag{A.4}$$

由假设，下面的映射

$$(t,x,v)\to\nabla_x u(t,x,v),\nabla_v u(t,x,v)\ \text{ 和 }\ \Delta_v u(t,x,v)$$

是连续的且 b 是有界的，于是我们有

$$\lim_{h\uparrow\infty}\sup_{r\in[t_0-h,t_0]}|L_r u(r,x_0,v_0)-L_r u(t_0,x_0,v_0)|=0.$$

因此，通过在 (A.4) 式两边同时除以 t_0-t 并取极限 $t\uparrow t_0$ 可得

$$0=\lim_{t\uparrow t_0}\frac{1}{t_0-t}\int_t^{t_0}\Big(L_r u(r,x_0,v_0)-L_r u(t_0,x_0,v_0)\Big)\mathrm{d}r\leqslant-\delta<0,$$

进而得到矛盾. 所以 (A.1) 成立.

接下来，我们来去掉限制性条件 (A.2). 令

$$f(x,v)=1+|x|^2+|v|^2.$$

注意到从 Young 不等式可得存在常数 $C>0$ 使得

$$|L_t f(x,v)|\leqslant Cf(x,v),\quad\forall(t,x,v)\in\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{2d}.$$

对于 $\delta>0$ 定义

$$u_{\delta,\varepsilon}(t,x,v):=u(t,x,v)+\delta t+\varepsilon e^{2Ct}f(x,v).$$

则，我们有

$$\begin{aligned}&\Big(\mathscr{L}_\lambda-b(t,x,v)\cdot\nabla_v\Big)u_{\delta,\varepsilon}(t,x,v)=\partial_t u_{\delta,\varepsilon}(t,x,v)-L_t u_{\delta,\varepsilon}(t,x,v)\\&=\Big(\mathscr{L}_\lambda-b(t,x,v)\cdot\nabla_v\Big)u(t,x,v)+\delta+\varepsilon e^t\Big(2Cf(x,v)-L_t f(x,v)\Big)\geqslant\delta,\end{aligned}$$

和

$$u_{\delta,\varepsilon}(0,x,v)\geqslant 0,\qquad\lim_{|(x,v)|\to\infty}\inf_{t\in[0,T]}u_{\delta,\varepsilon}(t,x,v)=+\infty.$$

因此，基于我们上面的证明可得

$$u_{\delta,\varepsilon}(t,x,v)\geqslant 0,\quad\forall(t,x,v)\in[0,T]\times\mathbb{R}^{2d}.$$

令 $\varepsilon,\delta\to 0$，我们得到(A.1). 证毕. □

作为上面结果的推理，我们有下面的极大值原理.

定理 A.0.2 (**极大值原理**) 取 $\lambda \geqslant 0$ 和 $T > 0$. 对于下面方程所有的经典解 u,

$$\mathscr{L}_\lambda u - b \cdot \nabla_v u = f, \quad u_0 = 0,$$

下式成立

$$\|u\|_{\mathbb{L}^\infty_T} \leqslant T\|f\|_{\mathbb{L}^\infty_T}. \tag{A.5}$$

证明 令

$$\bar{u}(t,x,v) := -u(t,x,v)\mathrm{e}^{\lambda t} + \int_0^t \|f(s,\cdot,\cdot)\|_\infty \mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s. \tag{A.6}$$

易知对于 Lebesgue 几乎处处的 $t > 0$,

$$\mathscr{L}_\lambda \bar{u} - b \cdot \nabla \bar{u} \geqslant 0.$$

因为 $\bar{u}(0,x,v) = 0$，由 Theorem A.0.1，我们有

$$\bar{u}(t,x,v) \geqslant 0.$$

因此，根据 (A.6) 我们可以得到

$$u(t,x,v) \leqslant \mathrm{e}^{-\lambda t}\int_0^t \|f(s,\cdot,\cdot)\|_\infty \mathrm{e}^{\lambda s}\mathrm{d}s \leqslant \frac{1-\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda}\|f\|_{\mathbb{L}^\infty_t} \leqslant T\|f\|_{\mathbb{L}^\infty_t}.$$

由对称性可得 (A.5). 即为所证. □

附录 B　辅助结论

在本节，我们给出一些容易证明的小结论.

引理 B.0.1 对于 $\widetilde{K}(x,v)=K(x)$ 和任意的 $\beta\in\mathbb{R}$，有

$$\|\widetilde{K}\|_{\mathbf{C}^\beta_a}\asymp\|K\|_{\mathbf{C}^{\beta/3}}. \tag{B.1}$$

证明　基于定义，对任意的 $j\geqslant 0$ 有，

$$\mathcal{R}^a_j\widetilde{K}(x,v)=\int_{\mathbb{R}^{2d}}\check{\phi}^a_j(x-x',v-v')K(x')\mathrm{d}x'\mathrm{d}v'=h_j*K(x),$$

其中

$$h_j(x):=\int_{\mathbb{R}^d}\check{\phi}^a_j(x,v)\mathrm{d}v.$$

注意到对于任意的 $j\geqslant 1$，

$$\hat{h}_j(\xi)=2^{3jd}(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^{2d}}\mathrm{e}^{ix\cdot\xi}\check{\phi}^a_1(2^{3j}x,v)\mathrm{d}x\mathrm{d}v=\phi^a_1(2^{-3j}\xi,0),$$

其中 $\phi^a_1(2^{-3j}\cdot,0)$ 的支撑集包含于

$$\Big\{2^{j-1}<|\xi|^{1/3}<2^{j+1}\Big\}=\Big\{2^{3(j-1)}<|\xi|<2^{3(j+1)}\Big\}.$$

特别地，下面的范数等价

$$\|f\|_{\mathbf{C}^\beta}\asymp\sup_{j\geqslant 0}2^{3j\beta}\|h_j*f\|_\infty.$$

因此，

$$\|\widetilde{K}\|_{\mathbf{C}^\beta_a}=\sup_{j\geqslant 0}2^{j\beta q}\|\mathcal{R}^a_j\widetilde{K}\|_\infty=\sup_{j\geqslant 0}\big(2^{\beta j}\|h_j*K\|_\infty\big)\asymp\|K\|_{\mathbf{C}^{\beta/3}}.$$

即为所证. □

引理 B.0.2 令 $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 为一族在 $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 上的概率测度. 假设 μ_n 弱收敛到 μ 且 $K=K(x)\in\mathbf{C}^\beta$, 则对于所有的$\beta_0<\beta$，有

$$\lim_{n\to\infty}\|K_n*\mu_n-K*\mu\|_{L^\infty_T\mathbf{C}^{\beta_0}}=0.$$

证明 注意到只需要对满足 $\beta-\beta_0\in(0,1)$ 的 β_0 证明即可. 基于 Skorohod 表示定理，存在一个概率空间 $(\widetilde{\Omega},\widetilde{\mathscr{F}},\widetilde{\mathbb{P}})$ 和其上的 $C([0,T];\mathbb{R}^d)$ 值随机变量 X_n, X 使得

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[0,T]}|X_n(s)-X(s)|=0\ \ a.s.,$$

和

$$\widetilde{\mathbb{P}}\circ(X_n)^{-1}=\mu_n,\ \ \widetilde{\mathbb{P}}\circ X^{-1}=\mu.$$

令 $\mathcal{R}_j$ 是 $a=(1,\cdots,1)$ 时 (2.9) 中定义的分块算子. 使用和 (2.32) 式估计类似的方法，对于任意的 $j\geqslant -1$ 和 $h\in\mathbb{R}^d$ 有

$$\|\mathcal{R}_jK(\cdot+h)-\mathcal{R}_jK\|_{L^\infty}\lesssim|h|^{\beta-\beta_0}\|\mathcal{R}_jK\|_{\mathbf{C}^{\beta-\beta_0}}\lesssim 2^{-\beta_0 j}|h|^{\beta-\beta_0}\|K\|_{\mathbf{C}^\beta}. \tag{B.2}$$

据此，我们有

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}_jK_m-\mathcal{R}_jK\|_{L^\infty}&\leqslant\sup_x\int_{\mathbb{R}^d}|\mathcal{R}_jK(x-y)-\mathcal{R}_jK(x)|\phi_m(y)\mathrm{d}y\\&\lesssim m^{-(\beta-\beta_0)}\|\mathcal{R}_jK\|_{\mathbf{C}^{\beta-\beta_0}}\lesssim 2^{-\beta_0 j}m^{-(\beta-\beta_0)}\|K\|_{\mathbf{C}^\beta}.\end{aligned} \tag{B.3}$$

这时

$$\begin{aligned}|\mathcal{R}_j(K_n*\mu_n(s)-K*\mu(s))(x)|&=|\widetilde{\mathbb{E}}\mathcal{R}_jK_n(x-X_n(s))-\widetilde{\mathbb{E}}\mathcal{R}_jK(x-X(s))|\\&\leqslant\widetilde{\mathbb{E}}|\mathcal{R}_jK_n(x-X_n(s))-\mathcal{R}_jK(x-X_n(s))|\\&\quad+\widetilde{\mathbb{E}}|\mathcal{R}_jK(x-X_n(s))-\mathcal{R}_jK(x-X(s))|\\&=:\mathcal{J}^{(1)}_{n,j}(s,x)+\mathcal{J}^{(2)}_{n,j}(s,x).\end{aligned}$$

先考察 $\mathcal{J}^{(1)}_{n,j}(s,x)$ 项，由 (B.3) 可得

$$\|\mathcal{J}^{(1)}_{n,j}\|_{L^\infty_TL^\infty}\leqslant\|\mathcal{R}_jK_n-\mathcal{R}_jK\|_{L^\infty}\lesssim 2^{-\beta_0 j}n^{-(\beta-\beta_0)}\|K\|_{\mathbf{C}^\beta}.$$

对于 $\mathcal{J}^{(2)}_{n,j}(s,x)$，基于控制收敛定理和 (B.2)，我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sup_j 2^{\beta_0 j}\|\mathcal{J}^{(2)}_{n,j}\|_{L^\infty_TL^\infty}&\lesssim\widetilde{\mathbb{E}}\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[0,T]}\sup_j 2^{\beta_0 j}|\mathcal{R}_jK(x-X_n(s))-\mathcal{R}_jK(x-X(s))|\right)\\&\lesssim\widetilde{\mathbb{E}}\left(\lim_{n\to\infty}\sup_{s\in[0,T]}|X_n(s)-X(s)|^{\beta-\beta_0}\right)\|K\|_{\mathbf{C}^\beta}=0.\end{aligned}$$

从上面的两个估计中，我们立刻可以得到想要的收敛结果. 证毕. □

参考文献

[1] S. Albeverio and M. Röckner: Stochastic differential equations in infinite dimensions: Solutions via Dirichlet forms. *Probab. Theory Related Fields* **89** (1991), 347–386.

[2] R. Alexandre and C. Villani: On the Landau approximation in plasma physics. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* **21** (2004), 61-95.

[3] H. Bahouri, J.-Y. Chemin, R. Danchin: Fourier analysis and nonlinear partial differential equations, vol. 343 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. *Springer, Heidelberg*, 2011.

[4] I. Bailleul and M. Hoshino: Paracontrolled calculus and regularity structures I. *J. Math. Soc. Japan* **73** (2021), 553–595.

[5] I. Bailleul and M. Hoshino: Paracontrolled calculus and regularity structures II. *J. Éc. polytech. Math.* **8** (2021), 1275–1328.

[6] V. Barbu and M. Röckner: From nonlinear Fokker-Planck equations to solutions of distribution dependent SDE. *Ann. Probab.* **48** (2020), 1902–1920.

[7] L. Bertini and G. Giacomin: Stochastic Burgers and KPZ equations from particle systems. *Comm. Math. Phys.* **183** (1997), 571-607.

[8] J. Bergh, J. Löfström: Interpolation spaces: an introduction. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223. *Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York*, 1976.

[9] S. Benachour, B. Roynette, D. Talay, P. Vallois: Nonlinear self-stabilizing processes. I: Existence, invariant probability, propagation of chaos. *Stoch. Proc. Appl.* **75** (1998), 173-201.

[10] L. Boltzmann: "Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen". In: *Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften* 66 (1872),

275–370. Translation: Further studies on the thermal equilibrium of gas molecules, in *Kinetic Theory* **2** (1966), 88-174.

[11] J.-M. Bony: Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. (French) [Symbolic calculus and propagation of singularities for nonlinear partial differential equations] *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **14** (1981), 209–246.

[12] M. Bossy, D. Talay: A stochastic particle method for the McKean-Vlasov and the Burgers equation. *Math. Comp.* **66** (1997), 157-192.

[13] Bouchut F.: Existence and uniqueness of a global smooth solution for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck system in three dimensions. *J. Func. Anal.* **111** (1993), 239-258.

[14] F. Bouchut: Hypoelliptic regularity in kinetic equations. *J. Math. Pures Appl. (9)* **81** (2002), 1135-1159.

[15] Th. Brox: A one-dimensional diffusion process in a Wiener medium. *Ann. Probab.* **14** (1986), 1206–1218.

[16] R. Cannizzaro and K. Chouk: Multidimensional SDEs with singular drift and universal construction of the polymer measure with white noise potential. *Ann. Probab.* **46** (2018), 1710-1763.

[17] J. A. Carrillo , Y.-P. Choi and S. Salem : Propagation of chaos for the Vlasov-Poisson-Fokker-Planck equation with a polynomial cut-off. *Commun. Contemp. Math.* **21** (2019), 1850039.

[18] C. Cercignani: The Boltzmann equation and its applications. Applied Mathematical Sciences, 67. *Springer-Verlag, New York*, 1988.

[19] L.P. Chaintron and A. Diez: Propagation of chaos: a review of models, methods and applications. II. Applications. *arXiv:2106.14812* (2021).

[20] L.P. Chaintron and A. Diez: Propagation of chaos: a review of models, methods and applications. I. Models and methods. *arXiv:2203.00446* (2022).

[21] S. Chapman and T. G. Cowling: The mathematical theory of non-uniform gases. An account of the kinetic theory of viscosity, thermal conduction and diffusion in gases. Third edition, prepared in co-operation with D. Burnett *Cambridge University Press, London* 1970 xxiv+423 pp.

[22] P.E. Chaudru de Raynal: Strong existence and uniqueness for degenerate SDE with Hölder drift. *Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat.* **53** (2017), 259-286.

[23] P.-E. Chaudru de Raynal and S. Menozzi: Regularization effects of a noise propagating through a chain of differential equations: an almost sharp result. *Trans. Amer. Math. Soc.* **375** (2022), 1-45.

[24] Z.-Q. Chen, E. Hu, L. Xie and X. Zhang: Heat kernels for non-symmetric diffusion operators with jumps. *J. Differential Equations* **263** (2017), 6576-6634.

[25] M. Coghi and F. Flandoli: Propagation of chaos for interacting particles subject to environmental noise. *Ann. Appl. Probab.* **26** (2016), 1407-1442.

[26] D. Crisan and J. Xiong: Approximate McKean-Vlasov representations for a class of SPDEs. *Stochastics* **82** (2010), 53–68.

[27] Z.-Q. Chen and X. Zhang: L^p-maximal hypoelliptic regularity of nonlocal kinetic Fokker-Planck operators. *J. Math. Pures Appl. (9)* **116** (2018), 52-87.

[28] I. Corwin: The Kardar-Parisi-Zhang equation and universality class. *Random Matrices Theory Appl.* **1** (2012), 1130001, 76pp.

[29] S. Dachkovski: Anisotropic function spaces and related semi-linear hypoelliptic equations. *Math. Nachr.* **248/249** (2003), 40-61.

[30] G. Da Prato and A. Debussche: Strong solutions to the stochastic quantization equations. *Ann. Probab.* **31** (2003), 1900–1916.

[31] F. Delarue and R. Diel: Rough paths and 1d SDE with a time dependent distributional drift: application to polymers. *Probab. Theory Related Fields* **165** (2016), 1-63.

[32] P. Dintelmann: Fourier Multipliers between Weighted Anisotropic Function Spaces. Part I: Besov spaces. *Z. Anal. Anwendungen* **15** (1996), 579–601.

[33] F. Delarue and S. Menozzi: Density estimates for a random noise propagating through a chain of differential equations. *J. Funct. Anal.* **259** (2010), 1577-1630.

[34] A. Debussche and H. Weber: The Schrödinger equation with spatial white noise potential. *Electron. J. Probab.* **23** (2018), Paper No. 28, 16 pp.

[35] N. Ethier and G. Kurtz: Markov Processes: Characterization and Convergence. Wiley series in probability and mathematical statistics. *Wiley*, 1986.

[36] F. Flandoli, M. Leimbach and C. Olivera: Uniform convergence of proliferating particles to the FKPP equation.*J. Math. Anal. Appl.* **473** (2019), 27-52.

[37] F. Flandoli and M. Leocata: A particle system approach to aggregation phenomena. *J. Appl. Probab.* **56** (2019), 282-306.

[38] T. Funaki: A certain class of diffusion processes associated with nonlinear parabolic equations. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **67** (1984), 331-348.

[39] N. Fournier, M. Hauray and S. Mischler: Propagation of chaos for the 2d viscous vortex model. *J. Eur. Math. Soc.* **16** (2014), 1423-1466.

[40] M. Gerencsér and M. Hairer: A Solution Theory for Quasilinear Singular SPDEs. *Comm. Pure Appl. Math.* **72** (2019), 1983-2005.

[41] J. Glimm and A. Jaffe: Quantum Physics: A Functional Integral Point of View, 2nd ed. *Springer, New York*, 1987.

[42] F. Glose: On the dynamics of large particle systems in the mean field limit. (English summary) *Macroscopic and large scale phenomena: coarse graining, mean field limits and ergodicity*, 1-144, Lect. Notes Appl. Math. Mech., 3, Springer, [Cham], 2016.

[43] M. Gubinelli: Controlling rough paths. *J. Funct. Anal.* **216** (2004), 86-140.

[44] M. Gubinelli and M. Hofmanová: Global solutions to elliptic and parabolic Φ^4 models in Euclidean space. *Comm. Math. Phys.* **368** (2019), 1201-1266.

[45] M. Gubinelli and M. Hofmanová: A PDE construction of the Euclidean Φ^4 quantum field theory. *Comm. Math. Phys.* **384** (2021), 1-75.

[46] M. Gubinelli, P. Imkeller and N. Perkowski: Paracontrolled distributions and singular PDEs. *Forum Math. Pi* **3** (2015), e6, 75 pp.

[47] M. Gubinelli, H. Koch and T. Oh: Renormalization of the two-dimensional stochastic nonlinear wave equations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **370** (2018), 7335-7359.

[48] M. Gubinelli, H. Koch and T. Oh: Paracontrolled approach to the three-dimensional stochastic nonlinear wave equation with quadratic nonlinearity. *arXiv:1811.07808* (2018), to appear in J. Eur. Math. Soc.

[49] M. Gubinelli and N. Perkowski: KPZ reloaded. *Comm. Math. Phys.* **349** (2017), 165-269.

[50] M. Gubinelli and N. Perkowski: Energy solutions of KPZ are unique. *J. Amer. Math. Soc.* **31** (2018), 427-471.

[51] M. Hairer: Solving the KPZ equation. *Ann. of Math. (2)* **178** (2013), 559-664.

[52] M. Hairer: A theory of regularity structures. *Invent. Math.* **198** (2014), 269-504.

[53] M. Hairer and C. Labbé: Multiplicative stochastic heat equations on the whole space. *J. Eur. Math. Soc.* **20** (2018), 1005-1054.

[54] M. Hairer and H. Shen: The dynamical sine-Gordon model. *Comm. Math. Phys.* **341** (2016), 933-989.

[55] W. R.P. Hammersley, D. Šiška and L. Szpruch: Weak existence and uniqueness for Mckean-Vlasov SDEs with common noise. *Ann. Probab.* **49** (2021), 527–555.

[56] Z. Hao, M. Röckner and X. Zhang: Second order fractional mean-field SDEs with singular kernels and measure initial datas. *arXiv:2302.04392* (2023).

[57] Z. Hao, M. Wu, and X. Zhang: Schauder's estimate for nonlocal kinetic equations and applications. *J. Math. Pures Appl. (9)* **140** (2020), 139-184.

[58] L. Huang, S. Menozzi and E. Priola: L^p-Estimates for degenerate non-local Kolmogorov operators. *J. Math. Pures Appl. (9)* **121** (2019), 162-215.

[59] C. Imbert and L. Silvestre: The Schauder estimate for kinetic integral equations. *Analysis and PDE* **14** (2021), 717-204.

[60] P.-E. Jabin: A review of mean field limits for Vlasov equations. *Kinet. Relat. Models* **7** (2014), 661-711.

[61] P.-E. Jabin and Z. Wang: Mean field limit and propagation of chaos for Vlasov systems with bounded forces. *J. Funct. Anal.* **271** (2016), 3588-3627.

[62] P.-E. Jabin and Z. Wang: Mean field limit for stochastic particle systems. *Active particles. Vol. 1. Advances in theory, models, and applications*, 379-402, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser/Springer, Cham, 2017.

[63] P.-E. Jabin and Z. Wang: Quantitative estimates of propagation of chaos for stochastic systems with $w^{-1,\infty}$ kernels. *Invent. Math.* **214** (2018), 523-591.

[64] M. Kac: Foundations of kinetic theory. In *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954-1955, vol. III, 171-197. University of California Press, Berkeley and Los Angeles*, 1956.

[65] M. Kardar, G. Parisi and Y. Zhang: Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.* **56** (1986), 889-892.

[66] A. N. Kolmogorov: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (German) *Math. Ann.* **104** (1931), 415–458.

[67] A.N. Kolmogorov: Zufállige Bewegungen. *Ann. Math.* **35** (1934), 116-117.

[68] H. Kremp and N. Perkowski: Multidimensional SDE with distributional drift and Lévy noise. *arXiv:2008.05222* (2020).

[69] D. Lacker: Hierarchies, entropy, and quantitative propagation of chaos for mean field diffusions. *arXiv:2105.02983* (2021).

[70] L. D. Landau: Kinetic equation for the case of coulomb interaction. *Phys. Z. Sowjetunion.* **10** (1936), 154–164. Translation: The kinetic equation in the case of Coulomb interaction.*Zh. Eksper. i Teoret. Fiz* 7:2 (1937), 203-209.

[71] P.L. Lions: On Boltzmann and Landau equations. Philos. *Trans. Roy. Soc. London Ser. A* **346** (1994), 191-204.

[72] Lions P.-L. and Perthame B: Propagation of moments and regularity for the 3-dimensional VlasovPoisson system. *Invent. Math.* **105** (1991), 415-430.

[73] L. Lorenzi: Schauder estimates for degenerate elliptic and parabolic problems with unbounded coefficients in RN . *Differential Integral Equations* **18** (2005), 531-566.

[74] T. J. Lyons: Differential equations driven by rough signals. *Rev. Mat. Iberoam.* **14** (1998), 215-310.

[75] J. C. Maxwell: On the dynamical theory of gases. *Phil. Trans. R. Soc.* **157** (1867), 49–88.

[76] A. Mayorcas and H. Singh: Singular SPDEs on Homogeneous Lie Groups. *arXiv:2301.05121* (2023).

[77] H. P. McKean: Propagation of chaos for a class of non-linear parabolic equations. In *Stochastic Differential Equations (Lecture Series in Differential Equa-*

tions, Session 7, Catholic Univ., 1967), pages 41-57. *Air Force Office Sci. Res., Arlington, Va.*, 1967.

[78] Y. Mishura and A. Veretennikov: Existence and uniqueness theorems for solutions of McKean-Vlasov stochastic equations. *arXiv:1603.02212*, (2016).

[79] J.-C. Mourrat and H. Weber: Global well-posedness of the dynamic Φ^4 model in the plane. *Ann. Probab.* **45** (2017), 2398-2476.

[80] J.-C. Mourrat and H.Weber: The dynamic Φ^4_3 model comes down from infinity. *Comm. Math. Phys.* **356** (2017), 673-753.

[81] D. Nualart: The Malliavin Calculus and Related Topics, second ed., Probability and Its Applications (New York), *Springer-Verlag, Berlin*, 2006.

[82] H. Osada: Propagation of chaos for the two dimensional Navier-Stokes equation. *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **62** (1986), 8–11.

[83] F. Otto, J. Sauer, S. Smith and H. Weber: Parabolic Equations with Rough Coefficients and Singular Forcing. *arXiv:1803.07884*, (2018).

[84] F. Otto, J. Sauer, S. Smith and H. Weber: A priori bounds for quasi-linear SPDEs in the full sub-critical regime. *arXiv:2103.11039*, (2021).

[85] F. Otto and H. Weber: Quasilinear SPDEs via Rough Paths. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **232** (2019), 873-950.

[86] B. Perthame: Mathematical tools for kinetic equations. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **41** (2004), 205-244.

[87] S. Polidoro: Recent results on Kolmogorov equations and applications, pp. 129-143 in Proceedings of the Workshop on Second Order Subelliptic Equations and Applications (Cortona, Italy, 2003), edited by I. Birindelli et al., Università degli Studi della Basilicata, Potenza, 2004.

[88] N. Perkowski and T. C. Rosati: The KPZ equation on the real line. *Electron. J. Probab.* **24** (2019), 1-56.

[89] N. Perkowski and T. C. Rosati: A rough super-Brownian motion, *arXiv:1905.05825*, (2019).

[90] E. Priola: Global Schauder estimates for a class of degenerate Kolmogorov equations. *Studia Math.* **194** (2009), 117-153.

[91] D. Revuz and M. Yor: Continuous martingales and Brownian motion. Third

edition. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], 293. *Springer-Verlag, Berlin*, 1999. xiv+602 pp.

[92] M. Rosenzweig: The Mean-Field Limit of Stochastic Point Vortex Systems with Multiplicative Noise. arXiv preprint *arXiv:2011.12180*, (2020).

[93] M. Röckner, L. Xie and X. Zhang: Superposition principle for non-local Fokker-Planck-Kolmogorov operators. *Probab. Theory and Related Fields* **178** (2020), 699-733.

[94] M. Röckner and X. Zhang: Well-posedness of distribution dependent SDEs with singular drifts. *Bernoulli* **27** (2021), 1131-1158.

[95] A.-S. Sznitman: Topics in propagation of chaos. In École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIX|1989, volume 1464 of Lecture Notes in Math., pages 165-251. *Springer, Berlin*, 1991.

[96] S. Serfaty: Mean field limit for coulomb-type flows. *Duke Math. J.* **169** (2020), 2887-2935.

[97] M. Simon and C. Olivera: Non-local conservation law from stochastic particle systems. *J. Dynam. Differential Equations* **30** (2018), 1661-1682.

[98] H. Spohn: Large scales dynamics of interacting particles. *Springer Verlag, New York*, 1991.

[99] E.M. Stein: Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions. Princeton University Press, 1970.

[100] J. Svante: Gaussian Hilbert Spaces. Cambridge University Press, 1997.

[101] H. Triebel: Theory of function spaces III. Basel, Birkhäuser, 2006.

[102] H. Triebel: Theory of function spaces II, volume 84 of Monographs in Mathe matics. Birkhäuser Verlag, Basel, 1992.

[103] C. Villani: A review of mathematical topics in collisional kinetic theory. *Handbook of mathematical fluid dynamics, Vol. I, 71-305, North-Holland, Amsterdam*, 2002.

[104] C. Villani: On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations. (English summary) *Arch. Rational Mech. Anal.* **143** (1998), 273–307.

[105] A. A. Vlasov: "On Vibration Properties of Electron Gas". *J. Exp. Theor. Phys.* (in Russian). **8** (1938), 291.

[106] A. A. Vlasov: The vibrational properties of an electron gas. *Physics-Uspekhi* **10** (1968), 721-733.

[107] F.-Y. Wang: Distribution dependent SDEs for Landau type equations. *Stoch. Proc. Appl.* **128** (2018), 595-621.

[108] F. Y. Wang and X. Zhang: Degenerate SDE with Hölder-Dini drift and Non-Lipschitz noise coefficient. SIAM J. Math. Anal. Vol. 48, No. 3, pp. 2189-2222, 2016.

[109] J. Xue : Noncollision singularities in a planar two-center-two-body problem. Thesis (Ph.D.)-University of Maryland, College Park. 2013. 133 pp.

[110] X. Zhang: Stochastic Hamiltonian flows with singular coefficients. *Sci. China Math* **61** (2018), 1353-1384.

[111] X. Zhang: Second order McKean-Vlasov SDEs and kinetic Fokker-Planck-Kolmogorov equations. *arXiv:2109.01273* (2021).

[112] X. Zhang and X. Zhang: Cauchy problem of stochastic kinetic equations. *arXiv:2103.02267*, (2021).

[113] X. Zhang and G. Zhao: Singular Brownian Diffusion Processes. *Commun. Math. Stat.* **6** (2018), 533-581.

[114] X. Zhang, R. Zhu and X. Zhu: Singular HJB equations with applications to KPZ on the real line. *Probab. Theory Relat. Fields* **183** (2022), 789–869.

[115] R. Zhu and X. Zhu: Approximating 3D Navier-Stokes equations driven by space-time white noise. (English summary) *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.* **20** (2017), 1750020, 77 pp.

[116] R. Zhu and X. Zhu: Three-dimensional Navier-Stokes equations driven by space-time white noise. *J. Differential Equations* **259** (2015), 4443-4508.

[117] A. Zygmund, Smooth functions. *Duke Math. J.* **12** (1945), 47-76.

攻博期间研究经历及科研成果

一、发表的论文

[1] Z.-Q. Chen, Z. Hao and X. Zhang. Hölder regularity and gradient estimates for SDEs driven by cylindrical α-stable processes. *Electron. J. Probab.* **25** (2020), 1-23.

[2] Z. Hao, X. Peng and X. Zhang. Hörmander's hypoelliptic theorem for nonlocal operators. *J. Theoret. Probab.* **34** (2021), 1870-1916.

[3] Z. Hao, M. Röckner and X. Zhang. Euler scheme for density dependent stochastic differential equations. *J. Differential Equations* **274** (2021), 996-1014.

[4] Z. Hao, M. Wu, and X. Zhang, Schauder's estimate for nonlocal kinetic equations and applications. *J. Math. Pures Appl.* **140** (2020), 139-184.

二、待发表的论文

[1] M. Cheng, Z. Hao and M. Röckner. Strong and weak convergence for averaging principle of DDSDE with singular drift. arXiv:2207.12108 (2022).

[2] Z. Hao, M. Röckner and X. Zhang. Strong convergence of propagation of chaos for McKean-Vlasov SDEs with singular interactions. arXiv:2204.07952 (2022).

[3] Z. Hao, M. Röckner and X. Zhang. Second order fractional mean-field SDEs with singular kernels and measure initial datas. arXiv:2302.04392 (2023).

[4] Z. Hao, Z. Wang and M. Wu. Schauder's estimates for nonlocal equations with singular Lévy measures. arXiv:2002.09887 (2020).

[5] Z. Hao, X. Zhang, R. Zhu and X. Zhu. Singular kinetic equations and applications. arXiv:2108.05042 (2021).

[6] M. Wu and Z. Hao. Well-posedness of density dependent SDE driven by α-stable process with Hölder drifts. arXiv:2112.06757 (2021).

二、部分参会及报告经历

[1] 会议名称：Workshop on Stochastic Analysis and Applications

地点：新加坡，南洋理工大学

时间：2019-06

报告题目：Gradient estimates for SDEs driven by cylindrical -stable processes

报告人：郝子墨

[2] 会议名称：The 7th IMS-China, Internaional Conference on Stochastic and Probability

地点：大连，大连理工

时间：2019-07

报告题目：Gradient estimate for SDEs driven by cylindrical Levy processes

报告人：郝子墨

[3] 会议名称：随机分析研讨会

地点：北京北京大学

时间：2019-08

报告题目：Heat kernel of nonlocal kinetic operators

报告人：郝子墨

[4] 会议名称：LSA winter meeting-2019

地点：俄罗斯莫斯科，National Research University Higher School of Economics

时间：2019-12

报告题目：Gradient estimate for SDEs driven by cylindrical Levy processes

报告人：郝子墨

[5] 会议名称：CRC Retreat 2020

地点：德国，比勒费尔德 Zoom 线上

时间：2020-08

报告题目：Euler approximation for SDEs with irregular coefficients

报告人：郝子墨

[6] 会议名称：15th Berlin-Oxford Young Researchers Meeting on Applied Stochastic Analysis

地点：德国，柏林

时间：2022-05

报告题目：Strong convergence of propagation of chaos for McKean-Vlasov SDEs with singular interactions

报告人：郝子墨

[7] 会议名称：第七届全国概率论年会

地点：山东，威海

时间：2022-08

报告题目：Singular kinetic equations

报告人：郝子墨

致　　谢

樱花大道上的梧桐絮一年又一年的飘落，校园里的樱花在每个三月都会如期盛开. 但人来了又走，故事一茬接着一茬. 五年前，我便是怀着如此的心情写下了我的本科毕业论文. 如今，九载珞珈生涯接近尾声，回首这段丰富多彩却又如须臾之间的美好岁月，心中似有万千感慨.

有关我博士研究的开端我认为是大三的概率论课程. 在此，我遇到了我的博士导师张希承教授. 在关泽昊学长和喻洋学长的推荐下，我有机会参与到了张老师当时的讨论班学习. 随后张老师便将随机分析领域的大门帮我打开. 是张老师推荐我在大四时学习了奇异积分和 Besov 空间的相关理论，为以后的科研之路打下了坚实的基础. 还记得在我本科即将结束的时候，他第一次和我讲述 Krylov 估计的精妙，让我们深刻地理解了随机系统和确定的偏微分方程之间的联系，这也成为了我后面最为熟悉地工具; 还记得读博后，他第一次讲解何为 Malliavin 计算并给了我第一个有关这方面的问题; 还记得他第一次介绍动理学方程和 Schauder 估计，这也成为了我科研上的第一个突破口，在此方向上进行了越来越深入的研究. 从他那里，我收获了做问题时有了奇思妙想的喜悦，知晓了学术研究需要的持之以恒和循序渐进，体会了思考问题的钻之弥坚. 学习上，张老师更像是一个什么都感兴趣什么都要搞明白的朋友，他严谨细致又不畏困难的态度潜移默化地影响着我，始终是我学习的典范和榜样; 生活上，张老师也经常鼓励我关心我，在我迷茫和困惑时给予安慰，支持和建议. 可能千言万语也无法清晰的表达我对张老师的最诚挚的感谢，我私认为遇到张老师是我科研生涯最大的幸运.

其次，我想感谢武汉大学和武汉大学数学与统计学院，让我遇到了一位位博学多识又对学生循循善诱的好老师. 除张希承老师外，我想额外感谢樊启斌老师，章逸平老师，涂振汉老师和江宁老师：在初入武大学习时，是樊老师信任我支持我，认可我的数学才能，让我一次次的从失败中重拾信心；是章老师的数学分析课让我认识到了高等数学的严谨之美和逻辑之美，让我学会了以数学的视角去思考问题，解决问题; 在涂老师的复分析课上，我因为迟到被罚不允许听课，这深深鞭策了我，因此我可以始终思考我还有哪些不足；江老师恐怕是教过我课程最多的老师了，有实分析，拓扑学，Navier-Stokes 方程，Boltzmann 方程和动力学方程等课程. 江老师上课颇为有趣，又十分注重逻辑和知识的深入浅出，在学习到各种各样有关偏微分方程的知识的同时，也逐渐明白如何将知识进行表达和富有

逻辑感层次感地输出. 此外, 我也十分感谢其他的任课老师或是在学习生活中给予过帮助的老师同学们. 另一方面, 学校和学院也为我们提供了如此美好的学习科研环境 — 优雅古朴的数院图书馆, 适合学习和讨论的数院教室, 空气清新且被绿植包围的东北楼办公室以及东北楼外十分热爱蹭饭的猫咪. 这一切都在帮助着我思考, 学习和成长.

接下来, 我想感谢朱湘禅和朱蓉禅教授, 作为本篇毕业论文主要工作的合作者, 没有她们就不会有本篇毕业论文. 同时也非常感激她们在我申请博士后时给予的巨大帮助和鼓励. 是她们让我涉及了奇异随机偏微分领域的学习和研究. 每次和她们讨论问题都会令我受益匪浅. 她们对于学术和未知的热情和激情一直感染着我, 给予我动力和勇气. 可以和如此优秀的科研工作者一起学习一起工作, 亦是一件幸事.

紧接着, 我想感谢 Michael Röckner 教授. 我于 2021 年 10 月, 基于张希承老师的推荐, 前往德国比勒费尔德大学跟随 Michael Röckner 教授进行学习. 在此深深的感谢 Röckner 教授对于我的支持, 帮助和鼓励, 在他的教导下, 我于比勒菲尔德进行了有关带有奇异漂移系数的 McKean-Vlasov 方程的混沌演化, 平均原理和 Euler 逼近的研究.

下面, 我要感谢我同期的同门师兄师姐和师弟们, 是他们让我的学习和科研生命充满快乐又收获颇多. 感谢关泽昊学长和喻洋学长最开始的对我进入随机分析领域学习研究的支持和建议; 感谢王珍师姐和吴明燕师姐有关学习生活尤其是论文写作和 Latex 使用方面的帮助; 感谢张晓龙学长和夏鹏程师兄有关动理学方程和调和分析方面的讨论, 以及感谢他们作为榜样让我在科研持续性方面努力地进行学习; 感谢任崇阳和赖明洋师弟平时的讨论和互相帮助; 感谢赵元隆和陈子楷师弟在讨论班中的讲解和背后的努力准备. 同时, 也十分感谢解龙杰师兄有关快慢系统方面的讨论和其他方面的帮助与支持. 生活上也非常感谢大家的支持和陪伴, 球场上的挥汗如雨, 聚餐时的高谈阔论, 都是如精美琥珀般的璀璨回忆.

此外, 我还想感谢给予过我学术上或是生活上帮助和建议的陈振庆教授, 邓爱娇教授, Stéphane Menozzi 教授, 王振富教授, 许惟钧教授, 赵国换博士, 彭旭辉博士, 程梦雨博士等.

然后, 我最想感谢的是我的家人. 感谢我的爷爷在我很小的时候将我带入了数学的世界, 让年幼时的我逐渐一步一步喜欢上了这个可以将一生都托付的信仰. 从爷爷特殊且有趣的奇数阶幻方求解到面积和积分的定义, 再到用 Taylor 展开解释 Euler 公式, 爷爷让我看到了数学作为有别与其他自然科学的自我封闭性和由自己定义规则的游戏性, 这些始终让我乐在其中. 感谢我的妻子, 我的父母和我的祖父母, 是他们一直无条件的支持我, 鼓励我, 包容我, 我才能如此顺利的完

成学业.

最后，借着这明媚的春光，再一次感谢在我求学路上所有帮助过我，支持过我的家人朋友，老师同学，甚至是陌生人. 梧桐絮依然会每年飘落，樱花亦将不断地绽放，期待在以后的故事里，继续书写美好的华章.